

Теоретични основи на индустриалната  
математика

Записки на лекциите

Тихомир Иванов

10 март 2022 г.



# Съдържание

<b>I</b>	<b>Теоретични основи на индустриалната математика - част 1</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>Векторно смятане и приложения. Математически модели, основаващи се на закони за запазване – въведение. Въведение в Нютоновата механика.</b>	<b>11</b>
1.1	Вектори в $\mathbb{R}^n$ . Векторни функции на един скаларен аргумент.	12
1.2	Движение на частица...	25
1.3	Скаларни функции на векторен аргумент...	42
1.4	Векторни функции на векторен аргумент. Дивергенция и ротация на векторно поле.	53
1.5	Уравнения на топло- и масо-пренос. Уравнения от тип реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис	62
1.6	Операторът $\nabla$ в недекартови координатни системи	67
1.7	Криволинейни интеграли	69
1.8	Основни теореми на интегралното смятане	71
1.8.1	Основна теорема за криволинейни интеграли	71
1.8.2	Теорема на Green	75
1.8.3	Векторни форми на теоремата на Green	78
1.8.4	Извеждане на уравнението на непрекъснатостта. Координатно-инвариантна дефиниция за дивергенция.	80
<b>2</b>	<b>Линейни алгебрични системи, линейни пространства, линейни трансформации</b>	<b>83</b>
2.1	Геометрия на линейните алгебрични системи	83
2.2	Четири основни подпространства на $\mathbb{R}^n$ , свързани с дадена матрица	90
2.3	Линейните алгебрични системи и четирите основни подпространства	96
2.4	Линейни оператори	102
2.4.1	Матрица на линеен оператор	102
2.4.2	Матрица на линеен оператор и смяна на базисите	104
2.5	Собствен базис. Диагонализация на матрица.	106
2.6	Метод на най-малките квадрати – линейни задачи	110
2.7	Декомпозиция по сингулярни стойности (SVD). Псевдообратни матрици.	115
<b>II</b>	<b>Теоретични основи на индустриалната математика -</b>	

<b>част 2</b>	<b>121</b>
<b>3 Задачи за параметрична идентификация</b>	<b>123</b>
3.1 Нелинейни задачи за най-малки квадрати . . . . .	123
3.2 Числени методи за нелинейни задачи за най-малки квадрати . .	125
3.2.1 Методи с линейно търсене . . . . .	126
3.2.2 Сравнение на методите с линейно търсене . . . . .	128
3.2.3 Методи с търсене в доверителна област . . . . .	129
3.3 Параметрична идентификация в модели, описвани с диференци- ални уравнения . . . . .	130
<b>4 Математически модели, описвани със системи ОДУ</b>	<b>133</b>
4.1 Задачата на Коши за ОДУ като математически модел . . . . .	133
4.2 Автономни системи. Равновесни точки и устойчивост. Векторни полета и фазови портрети. Линейни автономни системи. . . . .	139
4.3 Линеаризация на нелинейни автономни системи. Локални асим- птотични свойства на решенията. . . . .	148
4.4 Глобална асимптотика на решенията . . . . .	153
4.4.1 Теория на Poincarè–Bendixson . . . . .	154
4.4.2 Теорема на Ляпунов. Принцип за инвариантност на ЛаСал.160	
<b>5 Тензорно смятане и приложения</b>	<b>163</b>
5.1 Тензори . . . . .	163
5.2 Уравнения на Navier–Stokes . . . . .	163



# Част I

## Теоретични основи на индустриалната математика - част 1



# Предговор

Целта на настоящия курс е да изгради някои необходими основи, така че да може езикът на математиката да се използва за описването на реални процеси. Тази основа трябва да послужи за разбирането на смисъла на даден математически модел, но и да изгради една обща математическа култура, която да позволява самостоятелното четене на математическа литература.

За да добием идея за това какво представляват математическите модели, нека разгледаме няколко класически модела на реални процеси. Ние сега няма да се спираме върху самите модели и да коментираме как те се получават, но искаме да добием представа какво участва в тях (чисто формално), за да знаем кои да са математическите обекти, с чието изучаване първо да се занимаем.

- Уравнение от тип реакция-дифузия-адвекция. Описва например разпространението на топлина, вещество и др.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D(\mathbf{x}, t, u)\nabla u + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)u) + f(\mathbf{x}, t, u)$$

Търсената величина е  $u$  – в различен контекст може да означава температура, концентрация и др.  $D$  е коефициент на дифузия, който може да зависи от точката в пространството (например, ако средата има различна проводимост в различни точки), времето (ако проводимостта се променя с времето) и др. Величината  $\mathbf{c}$  е скоростта на флуида, който пренася с движението си топлината/веществото и др. Да обърнем внимание, че в общия случай скоростта е векторна величина. Функцията  $f$  описва източник/поглъщател/ реакция и др.

- Уравнение на непрекъснатостта

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

Това уравнение задава общия вид на модели, които описват преноса на вещество/топлина и др. В него  $\mathbf{j}$  е потокът – векторна величина, която описва, грубо казано, накъде и с каква скорост се разпространява топлината/веществото и т.н. Например в горния модел потокът е вследствие на дифузия и адвекция  $\mathbf{j} = -D(\mathbf{x}, t, u)\nabla u + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)u$ .

- Уравнения на Navier–Stokes (описват динамиката на несвивеми Нютонови флуиди)

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v},$$
$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

В последното  $\mathbf{v}$  е скоростта на флуида,  $\rho$  е неговата плътност,  $p$  е налягането,  $\mu$  е вискозитетът на флуида, а  $\mathbf{g}$  описва обемни сили, например гравитационни, електромагнетични сили и др. Да обърнем внимание, че в този случай имаме система от частни диференциални уравнения.

- SIR-модел на развитието на епидемия:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\alpha SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha SI - \beta I, \\ \frac{dR}{dt} &= \beta I.\end{aligned}$$

В този модел  $S, I, R$  имат смисъла на брой податливи на заразата, инфектирани и отстранени от популацията (възстановени с имунитет или починали).

- Общ вид на ОДУ от първи ред.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}).$$

В общия случай  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{f}$  са векторни функции.

SIR-моделът например може да се запише в този вид, ако положим  $\mathbf{u} = (S, I, R)^T$ ,  $\mathbf{f} = (-\alpha SI, \alpha SI - \beta I, \beta I)^T$ .

Както виждаме от горните примери, обикновено търсим зависимост между основните величини, характеризиращи процеса, т.е. функция, която ги свързва. Последната често зависи от няколко пространствени променливи (точката в пространството) и времето  $t$ , т.е. е функция на една или няколко променливи (или функция, зависеща от векторна променлива). Често функцията не е известна аналитично, но се задава като решението на ДУ или система от ДУ, (освен за най-простите закономерности, за които емпирично е установена аналитична зависимост, например при свободно падане на телата изминатият път е  $s(t) = gt^2$ ). В ДУ участват функцията и нейни производни, както и други величини – скаларни и векторни, които определят еволюцията на процеса. За разбирането на горните модели ще трябва да коментираме и смисъла на оператора  $\nabla$ . Да обърнем внимание, че той може да се прилага по различен начин – директно  $\nabla u$ , като скаларно произведение –  $\nabla \cdot u$  и т.н. – това са въпроси, които тепърва ще изясняваме. Често математическите модели представляват системи от диференциални уравнения (а не само едно уравнение), могат да бъдат нелинейни и т.н.

Да споменем, че аналитичният вид (посредством формула, напр.  $\sin xy$ ) и ДУ не са единствените начини за задаване на функции. Изкуствените невронни мрежи, които последните години добиха голяма популярност, са по същество вид функции – те приемат стойности (на входа си) като аргументи и на изхода си връщат резултат – т.е. изпълняват дефиницията за функция.

И така, едната основна тема в първата част на курса ще бъде изучаването на работата с функции (скаларни/векторни) на скаларен/векторен аргумент и диференциалните операции с тях (в частност работата с оператора  $\nabla$ ). Така,

ние ще можем да разбираме математическите модели (в частност приведените по-горе примери) – какво означават, и да ги изведем. Ще се запознаем и с основите на интегралното смятане с такива функции.

Останалата част от първия семестър е посветена на изучаването на работата в линейни пространства и векторно-матричното смятане като фундаментални въпроси, необходими за възприемане на теорията при разглеждането на съответните математически модели.



# Глава 1

## Векторно смятане и приложения. Математически модели, основаващи се на закони за запазване – въведение. Въведение в Нютоновата механика.

Когато искаме да опишем даден реален процес, ние трябва да изберем основните величини, които го характеризират, и да съставим математически модел, който ги свързва. Най-общо можем да разделим величините на:

- скаларни величини: температура, време, налягане, плътност, маса и др.;
- векторни величини:
  - величини, които се характеризират с големина и посока: скорост, сила, поток, отместване и др.
  - величини, които могат да се представят като списъци от числа/списъци от скаларни величини: състоянието на двумерна система хищник-жертва (т.е. списък от скаларните числености на хищника и жертвата), седмичният оборот за период от 4 седмици и др.
- тензорни величини: тях ще коментираме по-нататък в курса; такива са например напреженията и деформациите в дадено еластично тяло.

Първата цел на настоящия курс ще бъде да разгледаме математическите обекти, които описват тези величини – скалари и вектори, скаларни и векторни функции – и да изучим работата с тях. В същото време ще дадем примери за два важни класа математически модели (модели на класическата Нютонова механика и модели на топло- и масо-пренос). От една страна, те ще ни послужат като илюстрация на разглежданата теория, но сами по себе си те са в основата на математическото моделиране на много реални процеси. Също така, изучаването им е важна стъпка към моделирането на по-сложни, например многокомпонентни, физически системи, където те играят ролята на градивни блокове в разглежданите математически модели.

## 1.1 Вектори в $\mathbb{R}^n$ . Векторни функции на един скаларен аргумент.

Много често векторните величини се представят математически чрез алгебрични вектори от  $\mathbb{R}^n$  – множеството на всички наредени  $n$ -торки от реални числа:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n)^T : x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}.$$

Ще се условим, когато говорим за вектори от  $\mathbb{R}^n$ , да имаме предвид вектор-стълбове, ако не сме уточнили противното или контекстът не го изисква. Вектори ще отбелязваме с  $\vec{x}$  или  $\bar{x}$  в ръкописен текст и с  $\mathbf{x}$  в печатен.

Както отбелязахме, векторни са тези величини, които се характеризират с големина и посока или които представляват списъци от числа/списъци от скаларни величини. Във втория случай (списък от числа), използването на алгебрични вектори е съвсем естествено.

**Пример 1.** Да разгледаме примерна таблица, съдържаща данни за приходите от два различни продукта за период от 4 седмици:

	Продукт 1	Продукт 2
Седмица 1	1325	2125
Седмица 2	775	2005
Седмица 3	1822	1008
Седмица 4	2008	2286

Информацията за всеки един от продуктите е векторна величина, която може да се представи със следните вектор-стълбове.

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1325 \\ 775 \\ 1822 \\ 2008 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 2125 \\ 2005 \\ 1008 \\ 2286 \end{bmatrix}.$$

Аналогично информацията за всяка седмица може да се представи със следните вектор-редове:

$$\mathbf{r}_1 = [1325, 2125], \quad \mathbf{r}_2 = [775, 2005], \quad \mathbf{r}_3 = [1822, 1008], \quad \mathbf{r}_4 = [2008, 2286].$$

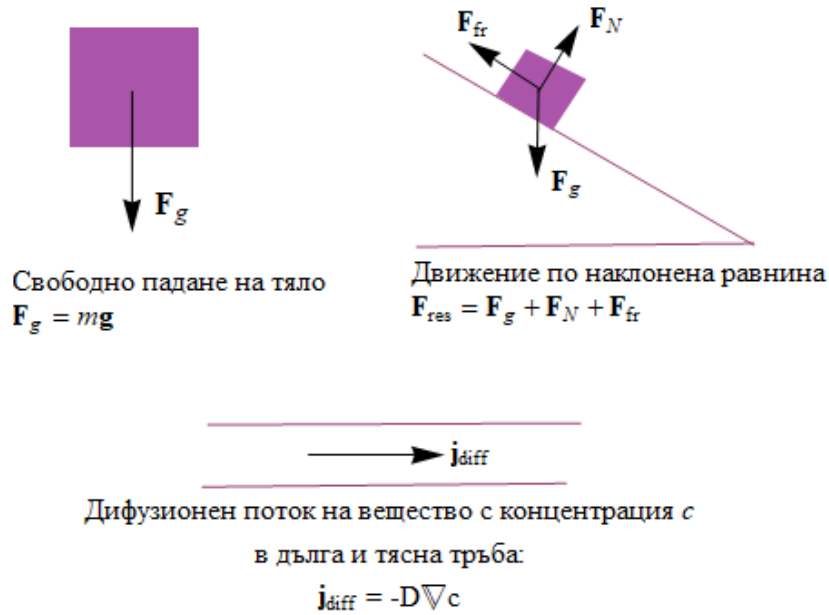
Така, ако искаме да намерим общия приход от двата продукта за всяка седмица, трябва да пресметнем сумата  $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ .

**Пример 2.** Моментното състояние на двумерна (или повече-мерна) физическа система също е естествено да се представи като наредена  $n$ -торка. Така например, ако разглеждаме една екосистема от тип хищник-жертва, то нейното моментно състояние може да се опише чрез наредената двойка  $(N, P)^T$ , където  $N$  е числеността на жертвите, а  $P$  – числеността на хищниците.

Когато разглеждаме векторна величина, която се характеризира с големина и посока, естественият математически обект, който я представя, е геометричният вектор (насочена отсечка или по-точно множеството от всички равни насочени отсечки).

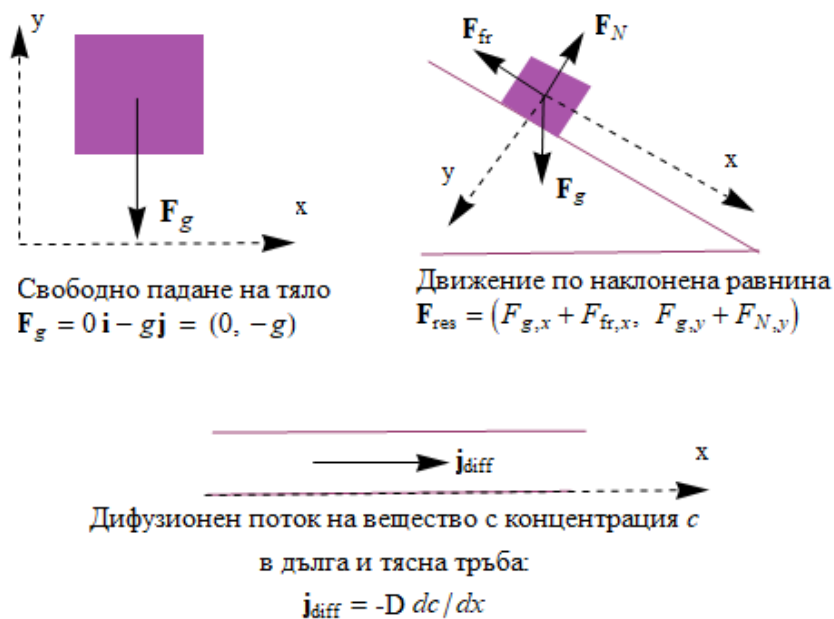
Нека разгледаме зависимостите, представени на следната фигура:





Когато искаме да формулираме даден физичен модел, обикновено е добре това да стане в тази обща постановка (операторен вид), защото тя е независима от конкретната геометрия на задачата, размерността, избора на координатна система и др. Ще казваме, че е геометрически инвариантна.

Когато искаме да работим с модела обаче (да го решим, да направим дадени преобразования и т.н.), е необходимо да въведем координатна система, за да можем да работим със съответните величини, използвайки известните алгебрични и аналитични операции. С други думи, работата с физични величини също се свежда до работата с алгебрични вектори.



**Н.В. 1**

Трябва ясно да осъзнаваме обаче, че геометричните и алгебричните вектори са различни обекти. Взаимно-еднозначно съответствие между тях съществува само що се отнася до линейните операции (събиране и умножение със скалар). Това е особено важно в неортогонални координатни системи, но ще се върнем на този въпрос по-нататък.

Ще започнем изучаването на работата с векторни величини, като припомним две основни операции с вектори и коментираме тяхното значение от приложна гледна точка.

**Скаларно произведение****Дефиниция 1**

Скаларното произведение на геометричните вектори  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  се дефинира чрез

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Лесно се проверява, че е в сила следното твърдение.

**Твърдение 1**

Нека  $\mathbf{a} = a_1 \hat{\mathbf{i}} + a_2 \hat{\mathbf{j}} + a_3 \hat{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{b} = b_1 \hat{\mathbf{i}} + b_2 \hat{\mathbf{j}} + b_3 \hat{\mathbf{k}}$ , където  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  е стандартният базис на пространството от геометрични вектори. Тогава

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

*Забележка.* Важен в последното твърдение е фактът, че  $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$  образуват ортонормиран базис.

Последното твърдение ни дава основание да въведем следната дефиниция за скаларно произведение в  $\mathbb{R}^n$

**Дефиниция 2**

Стандартното скаларно произведение в  $\mathbb{R}^n$  се дефинира чрез

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i.$$

**Какво ни дава скаларното произведение?**

Ще разгледаме няколко основни приложения на скаларното произведение, които ще играят ключова роля в по-нататъшното ни изучаване на приложна математика:

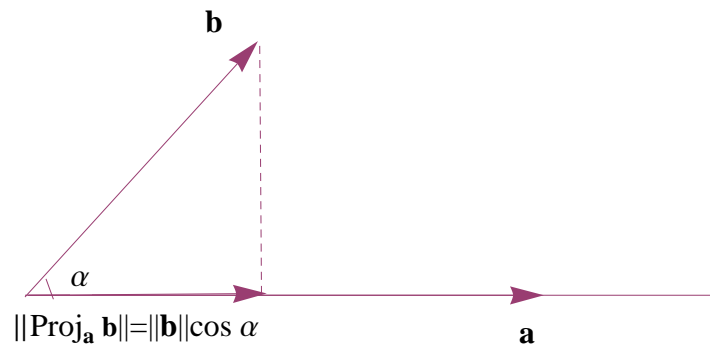
- (i) Скаларното произведение въвежда геометрия в дадено пространство, тъй като чрез него можем да дефинираме ъгли,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}.$$

В частност

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \text{ т.с.т.к. } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

- (ii) Скаларното произведение ни дава възможност да пресмятаме проекции. Да разгледаме следната фигура:



От нея може лесно да се съобразят следните равенства за скаларната и векторната ортогонални проекции (които за краткост ще наричаме съответно компонента и проекция):

$$\begin{aligned} \text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|}, \\ \text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} &= (\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \left( \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|} \right) \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}. \end{aligned}$$

В частност, ако искаме да намерим компонентата на вектора  $\mathbf{b}$  върху единичния вектор  $\mathbf{a}$  (или, казано по друг начин, да намерим компонентата на  $\mathbf{b}$  в дадено направление  $\mathbf{a}$ ), което е може би най-важният от практическа гледна точка случай, то имаме

$$\text{comp}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

а проекцията е

$$\text{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}.$$

- (iii) Във физиката работата  $W$ , която се извършва от постоянна сила, се дефинира като скаларно произведение на силата  $\mathbf{F}$  и отместването  $\mathbf{d}$ :

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$$

## Векторно произведение

В дадени ситуации е полезно да можем по дадени вектори  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  да намерим вектор  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , който е перпендикулярен на първите два. Неговите координати трябва да удовлетворяват

$$\begin{aligned} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 &= 0, \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Умножавайки първото уравнение с  $b_3$ , а второто – с  $a_3$  и изваждайки второто от първото, получаваме

$$(a_1b_3 - a_3b_1)c_1 + (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 = 0.$$

Едно очевидно решение на последното е

$$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad c_2 = -a_1b_3 + a_3b_1.$$

Оттук за  $c_3$  получаваме

$$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Вземайки предвид казаното дотук, дефинираме векторно произведение по следния начин:

### Дефиниция 3

Векторното произведение на векторите  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  се дефинира чрез

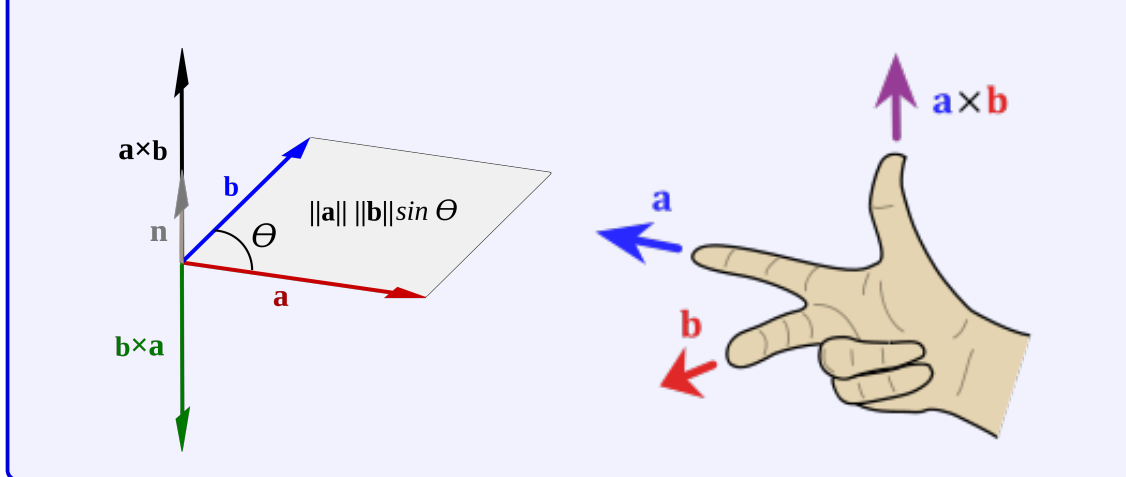
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} := \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Последната дефиниция е в координатна форма, т.е. зависи от избора на координатна система. Ние ще се стремим, когато това е възможно и целесъобразно, да даваме геометрично-инвариантни дефиниции на разглежданите понятия. Може да се покаже, че за векторното произведение е в сила следната дефиниция.

**Дефиниция 4**

Векторното произведение  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  е вектор, перпендикулярен на  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , образуващ положително ориентирана тройка  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  и имащ дължина

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

**Какво ни дава векторното произведение?**

Ще обърнем внимание на следните приложения на векторното произведение (вж. първата илюстрация към дефиницията):

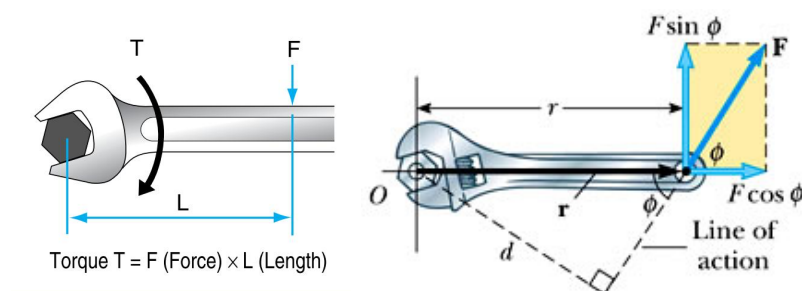
- (i) Първото очевидно приложение е за намиране на перпендикулярен вектор на други два вектора и нормален вектор на равнина.
- (ii) Вземайки предвид геометрически-инвариантната дефиниция е ясно, че векторното произведение ни дава критерий за колинеарност/успоредност. В сила е

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \text{ т.с.т.к. } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

- (iii) Големината на  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  дава лицето на успоредника, определен от векторите  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .
- (iv) Във физиката моментът  $\boldsymbol{\tau}$  на дадена сила  $\mathbf{F}$  около дадена точка  $O$  е

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

където  $\mathbf{r}$  е вектор, свързващ точката  $O$  и точката, в която е приложена силата. Ще говорим по-подробно за това понятие в тема 1.7. Достатъчно е засега да отбележим, че то е свързано с тенденцията на силата да върти даден обект, фиксиран в точката  $O$ :



## Скаларни и векторни функции

Както отбелязахме, даден конкретен вектор може да опише статичен обект или моментно състояние на даден процес или дадена система. Нещата около нас обаче се изменят – както във времето, така и в пространството. Математическите обекти, които описват тези изменения, са функциите. Най-често независимите променливи са пространствени променливи (от една до три) и една времева променлива. Разбира се, разглеждаме и функции как дадени величини зависят помежду си, например обемът на даден газ като функция на налягането и температурата, производството като функция на търсенето и др. Ще направим следната класификация:

- Скаларна функция на скаларен аргумент, например числеността на дадени организми като функция на времето,  $N(t)$ , височината на всяка точка от даден закачен кабел/верига като функция на една пространствена променлива,  $h(x)$ , и др.



- Векторна функция на скаларен аргумент, например скоростта като функция на времето  $\mathbf{v}(t)$ , състоянието на система хищник-жертва като функция на времето,  $(N(t), P(t))$  и др.
- Скаларна функция на векторен аргумент/на много променливи, например температурата като функция на две пространствени променливи (или, което е еквивалентно, на векторна променлива с две компоненти),  $u(x, y) = u(\mathbf{x})$ , налягането като функция на три пространствени и една времева променливи,  $p(x, y, z, t) = p(\mathbf{x}, t)$  и др.
- Векторна функция на векторен аргумент, например потокът на дадено вещество/на топлина като функция на пространствени променливи,  $\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}(x, y)$ , състоянието на дадена система хищник-жертва като функция на две пространствени и една времева променливи,  $(N(x, y, t), P(x, y, t))^T$ , и др.

Ще разгледаме работата с всеки от тези видове функции, като ще започнем с изучаването на векторните функции на скаларен аргумент. Тъй като скаларните функции на скаларен аргумент са достатъчно добре познати, а и са частен случай на векторни функции на скаларен аргумент, няма да се спираме специално на тях.

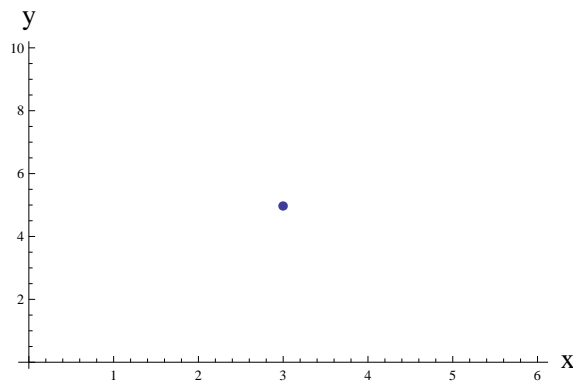
## Векторни функции на скаларен аргумент

Разглеждаме функция  $\mathbf{u}(t)$ , където  $\mathbf{u}$  е векторна величина. В координатна форма можем да запишем  $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ .

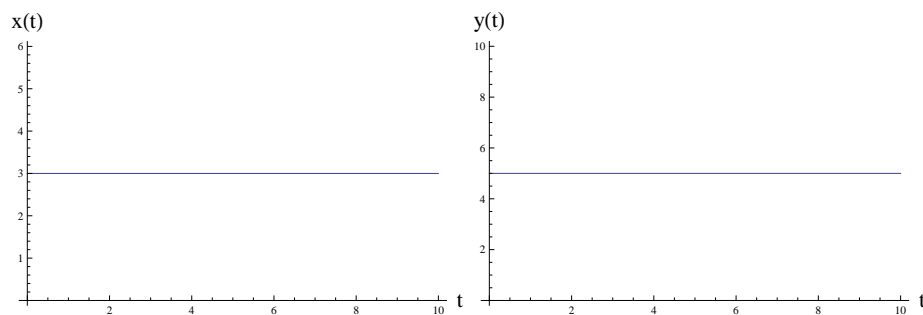
Можем да визуализираме дадена векторна функция, като:

- построим графиката на всяка от компонентите поотделно;
- изобразим параметричната крива, съответстваща на  $\mathbf{u}(t)$  (това, разбира се, е възможно само в 2D и 3D).

**Пример 3.** Да разгледаме константната векторна функция  $f(s) = (3, 5)$ . Параметричната крива, която ѝ съответства се състои само от една точка:



Съответно графиките на нейните компоненти са прави, успоредни на абсцисата:

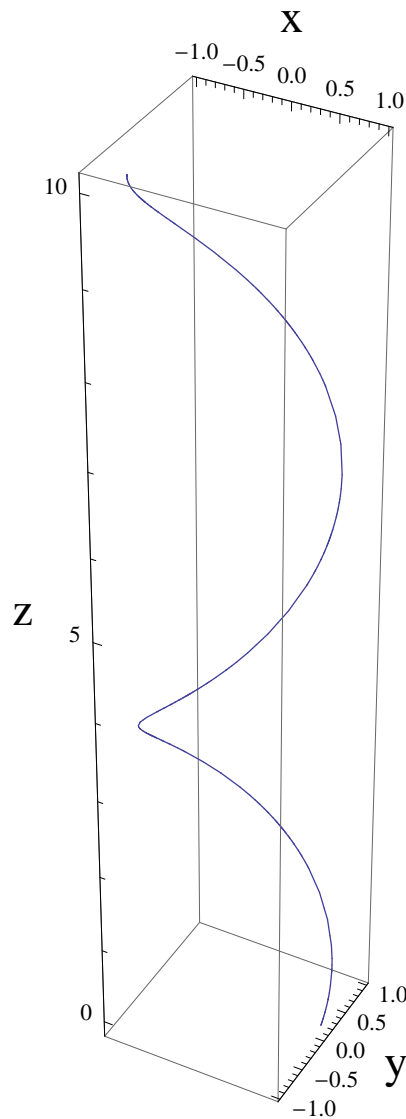


**Пример 4.** Да разгледаме функцията

$$\mathbf{f}(t) = \cos t \hat{\mathbf{i}} + \sin t \hat{\mathbf{j}} + t \hat{\mathbf{k}}$$

$$(\cos t, \sin t, t).$$

По-долу е визуализирана параметричната крива, съответстваща на функцията (вж. също файла *Lecture1.nb*).



Векторните функции на един скаларен аргумент описват:

- геометричен обект - крива в 2D и 3D, формата на дълъг и тънък обект, траекторията на дадена частица в пространството;
- всяка векторна величина (сила, скорост и др.) като функция на времето или на една пространствена променлива;
- списък от няколко скаларни функции, които заедно описват дадена физическа система (най-често нейната еволюция във времето).

В първите две упражнения ще бъдат дадени примери за тези приложения.

Основната операция, на която се базира цялото диференциално и интегрално смятане, е граничният преход. Нека с  $\rho(f, g)$  означаваме разстоянието между два обекта. Нека засега си мислим, че това е Евклидовото разстояние, т.е.

$$\rho((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

но всички дефиниции и твърдения, приведени по-долу, остават валидни и за произволен друг избор, предвид еквивалентността на нормите в дадено крайнономерно пространство, която ще коментираме по-късно в курса.



**Дефиниция 5**

Казваме, че

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L},$$

ако за всяко  $\varepsilon > 0$  можем да намерим  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такава, че от  $|t - a| < \delta$ ,  $t \neq a$  следва  $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{L}) < \varepsilon$ .

Можем да намерим границата на дадена векторна функция, като намерим границите на всички нейни компоненти поотделно.

**Твърдение 2**

Нека  $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ . Тогава

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = (\lim_{t \rightarrow a} f_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow a} f_n(t)).$$

*Доказателство.* Да допуснем противното, т.е.

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L} = (L_1, \dots, L_n),$$

но  $\lim_{t \rightarrow a} f_i(t) \neq L_i$  за някое  $i$ . Това означава две неща

- За всяко  $\varepsilon > 0$  съществува число  $\delta$  такава, че ако  $|t - a| < \delta$ ,  $t \neq a$ , тогава  $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{L}) < \varepsilon$ ;
- За някое  $\varepsilon > 0$ , без значение от избора ни на  $\delta$ , съществува  $t$  такава, че  $|t - a| < \delta$ ,  $t \neq a$ , но  $|f_i(t) - L_i| > \varepsilon$ . Но това означава, че  $\rho(\mathbf{f}(t), \mathbf{L}) > \varepsilon$ .

Двете са очевидно в противоречие, което доказва твърдението.  $\square$

Вече сме готови да дефинираме понятието производна на векторна функция на скаларен аргумент.

**Дефиниция 6**

Производната на векторната функция  $\mathbf{f}(t)$  в точката  $t_0$  се дефинира чрез

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h},$$

когато границата съществува.

Вземайки предвид факта, че можем да пресмятаме граници покомпонентно, то следното е очевидно.

**Твърдение 3**

Можем да диференцираме дадена векторна функция, като диференцираме всяка от компонентите ѝ поотделно, т.е.

$$\mathbf{r}'(t) = (f'_1(t), \dots, f'_n(t)).$$

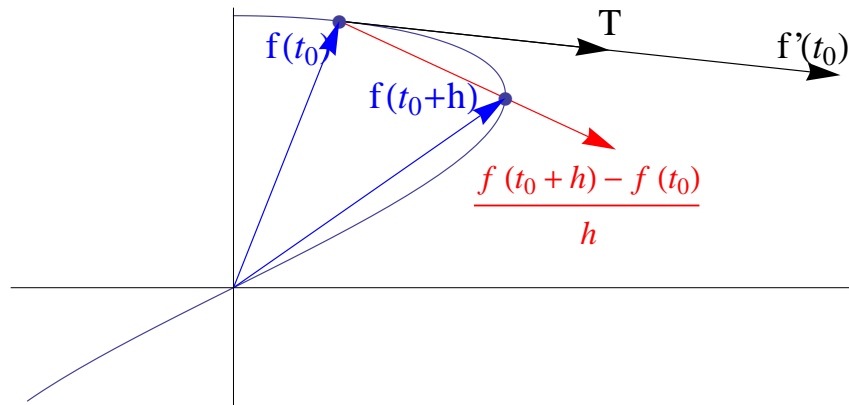
Както знаем, производната на дадена скаларна функция на скаларен аргумент дава наклона на допирателната към графиката на функцията. Тя може да бъде интерпретирана и като скоростта на изменение на функцията в дадената точка.

Нека сега интерпретираме производната на дадена векторна функция. От една страна, тя дава скоростта на изменение на всяка отделна компонента на функцията. Ако например разглеждаме позицията на частица като функция на времето, то производната ще ни даде вектора на скоростта в съответния момент от време. Ако функцията описва системата хищник-жертва от предишния пример, то всяка от компонентите на производната ще даде скоростта на изменение съответно на численостите на жертвата и хищника.

Нека сега се концентрираме върху геометричното значение на производната, т.е. когато интерпретираме (или визуализираме) дадена векторна функция като параметрична крива. Тогава числителят в диференчното частно

$$\frac{\mathbf{f}(t_0 + h) - \mathbf{f}(t_0)}{h}$$

е вектор, свързващ точките  $\mathbf{f}(t_0)$  и  $\mathbf{f}(t_0 + h)$ . Следователно диференчното частно е вектор в същото направление. Ако пуснем  $h \rightarrow 0$ , тогава диференчното частно ще клони към вектор, който е допирателен към параметричната крива в точката  $t_0$  (вж. фигурата, където  $\mathbf{T}$  е единичен допирателен вектор).



Анимирана визуализация на горната дефиниция може да бъде намерена във файла *Lecture1.nb*.

## N.B. 2

Геометрично производната на векторна функция е вектор, който е допирателен към параметричната крива, определена от функцията.

**Пример 5.** Да намерим единичен допирателен вектор към кривата (helix), определена от

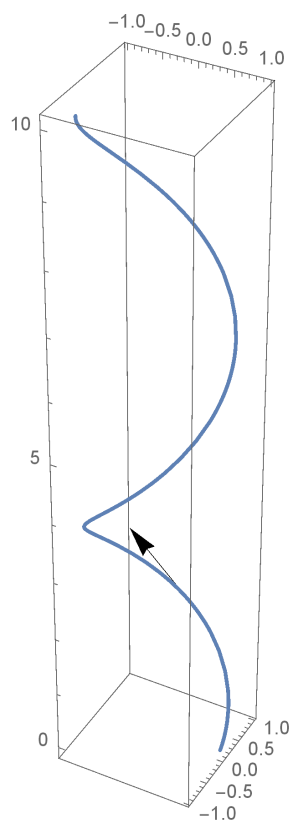
$$\mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

в точката  $(0, 1, \pi/2)$ .

Тази точка от кривата се получава при  $t = \pi/2$ .

Имаме  $\mathbf{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$  и следователно единичният допирателен вектор е

$$\frac{\mathbf{f}'(\pi/2)}{\|\mathbf{f}'(\pi/2)\|} = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}.$$



Анимация към примера може да бъде открита във файла *Lecture1.nb*.

Накрая на настоящия параграф ще приведем някои свойства на производната на векторна функция. В лекциите на настоящия курс обикновено няма да доказваме формули от този тип по две причини:

- доказателствата обикновено са чисто технически и могат да бъдат направени лесно за упражнение (съответни задачи ще бъдат включени към всяка тема);
- тези формули могат да бъдат лесно намерени във всеки справочник или в интернет, когато тяхното прилагане е необходимо.

В сила са следните класически свойства на производната:

$$(i) \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt};$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt}[c\mathbf{u}(t)] = c \frac{d\mathbf{u}}{dt};$$

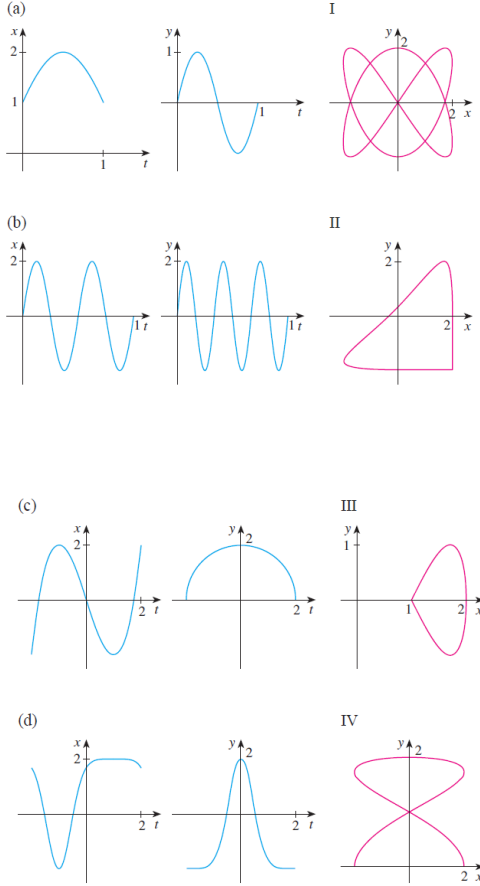
$$(iii) \quad \frac{d}{dt}[f(t)\mathbf{u}(t)] = \frac{df}{dt}\mathbf{u}(t) + f(t) \frac{d\mathbf{u}}{dt};$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt};$$

$$(v) \quad \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

**Допълнителни задачи**

**Задача 1.** Свържете графиките на параметричните уравнения  $x = f(t)$  и  $y = f(t)$  в (a) – (d) и параметричните криви I-IV:



**Задача 2.** Намерете уравнение на допирателната в дадената точка.

1.  $\mathbf{r}(t) = t \cos \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j}, \quad t = \pi;$
2.  $\mathbf{r}(t) = \sin^3 \theta \mathbf{i} + \cos^3 \theta \mathbf{j}, \quad \theta = \pi/6;$

**Задача 3.** Пресметнете  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  и проверете, че е ортогонален на  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

1.  $\mathbf{a} = (6, 0, -2)^T, \quad \mathbf{b} = (0, 8, 0)^T;$
2.  $\mathbf{a} = \mathbf{j} + 7\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k};$
3.  $\mathbf{a} = t\mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \sin t \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}.$

**Задача 4.** Дадена е функцията  $\mathbf{r}(t)$ . Скицирайте кривата, пресметнете  $\mathbf{r}'(t)$ , скицирайте радиус-вектора  $\mathbf{r}(t)$  и допирателния вектор  $\mathbf{r}'(t)$  за даденото  $t$ . Намерете единичния допирателен вектор  $\mathbf{T}(t)$ .

1.  $\mathbf{r}(t) = (t - 2, t^2 + 1)^T, \quad t = -1;$

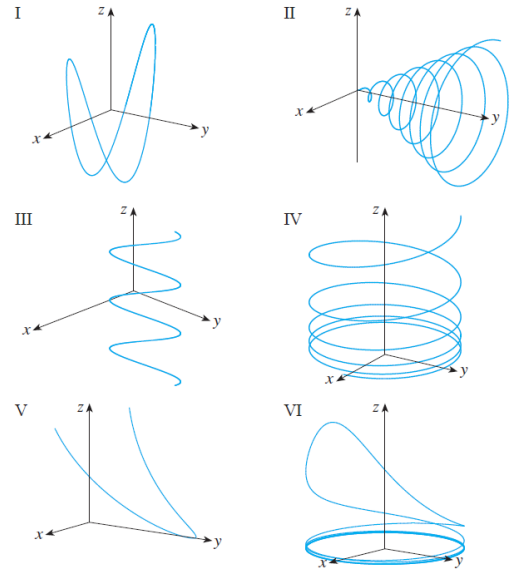
2.  $\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j}, \quad t = 0.$

**Задача 5.** Да се докажат свойствата за  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  и  $c \in \mathbb{R}$ :

1.  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a};$
2.  $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b});$
3.  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c};$
4.  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$

**Задача 6.** Свържете параметричните уравнения с графиките. Обосновайте избора си.

1.  $x = t \cos t, \quad y = t, \quad z = t \sin t, \quad t \geq 0;$
2.  $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1/(1 + t^2);$
3.  $x = t, \quad y = 1/(1 + t^2), \quad z = t^2;$
4.  $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \cos 2t;$
5.  $x = \cos 8t, \quad y = \sin 8t, \quad z = e^{0.8t}, \quad t \geq 0;$
6.  $x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t, \quad z = t.$



**Задача 7.** Нека  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  имат граница при  $t \rightarrow a$ . Докажете, че

- (a)  $\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t);$
- (б)  $\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{v}(t).$

**Задача 8.** За  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  докажете, че

- (a)  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t);$
- (б)  $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)$

## 1.2 Движение на частица. Статика. Втори закон на Нютон. Движение по окръжност и по криволинейна траектория. Закон на Нютон за гравитацията. Закон на Хук (линейна еластичност). Сили на триене и съпротивление.

Математическите модели на механични системи играят централна роля в много приложения. В магистърската програма ние ще направим въведение в тези модели. Най-простата механична система, от която можем да започнем нашето въведение, е частица, движеща се под действието на някакви сили. Класическите закони, които ще разгледаме тук, под някаква форма ще бъдат в основата на всички механични модели, с които ще се срещнем по-нататък.

Основните величини, описващи движението на частица в пространството, са нейните позиция, скорост и ускорение. В общия случай можем да опишем позицията на частицата във фиксиран момент от време чрез радиус-вектор относно отправна точка в пространството  $O$ . Тогава траекторията на частицата можем да опишем с векторна функция на времето, нека я означим с  $\mathbf{r}(t)$ . Скоростта на частицата е векторът  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , а големината на скоростта е  $|\mathbf{v}| = |d\mathbf{r}/dt| = ds/dt$ . Ще използваме и означението  $|\mathbf{v}| = v$ . В англо-езичната литература се използват съответно термините *velocity* и *speed*. Ускорението е векторната величина  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$ .

Обикновено, когато формулираме математически модел в механиката (и не само), това става в координатно-инвариантна форма, т.е. като използваме векторен запис. Когато решаваме числено моделите обаче, е необходимо това да става в координатна форма. В зависимост от ситуацията могат да са удобни различни координатни представяния (в различни видове координатни системи), поради което именно е удобно първоначално моделите да бъдат формулирани във вид, независещ от избора на координатна система.

В началото на втората част на курса (през втория семестър) ще коментираме работата в различни координатни системи, но за целите на настоящите разглеждания, когато работим в координатна форма, ние ще използваме стандартни декартови координати, например в 2D:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r_x \hat{\mathbf{i}} + r_y \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{v} &= \frac{dr_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dr_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} =: v_x \hat{\mathbf{i}} + v_y \hat{\mathbf{j}}, \\ \mathbf{a} &= \frac{dv_x}{dt} \hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt} \hat{\mathbf{j}} = \frac{d^2 r_x}{dt^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2 r_y}{dt^2} \hat{\mathbf{j}} =: a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}$$

Ако знаем една от трите величини и евентуално начални условия, можем лесно да намерим останалите две.

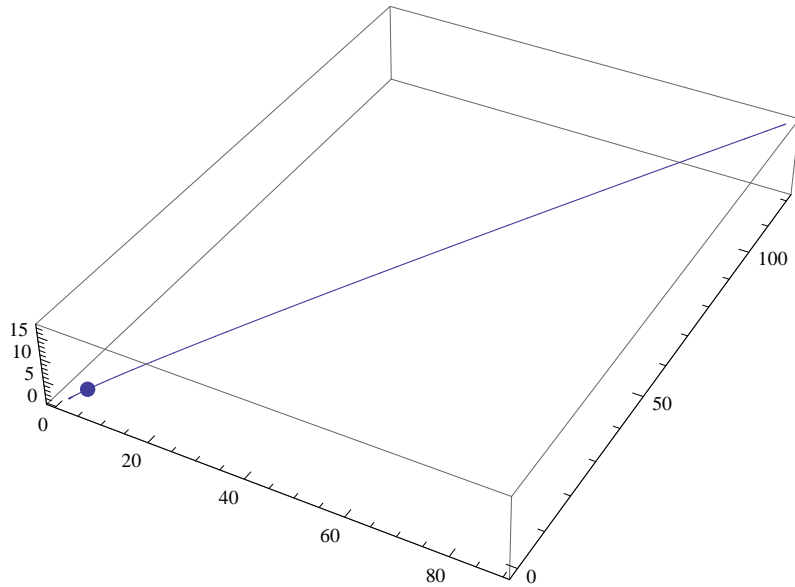
**Пример 6.** Частица с начална позиция  $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0)$  и начална скорост  $\mathbf{v}(0) = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$  се движи с ускорение  $\mathbf{a}(t) = 4t\hat{\mathbf{i}} + 6t\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ . Да намерим скоростта

и позицията на частицата като функции на времето. Скоростта ще получим, като към началната скорост прибавим сумата на измененията на скоростта в интервала от време  $[0, t]$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}(0) + \int_0^t d\mathbf{v} = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a}(\tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} + 2t^2\hat{\mathbf{i}} + 3t^2\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}} \\ &= (2t^2 + 1)\hat{\mathbf{i}} + (3t^2 - 1)\hat{\mathbf{j}} + (t + 1)\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$

Аналогично за позицията получаваме последователно

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(0) + \int_0^t d\mathbf{r} = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(\tilde{t})d\tilde{t} \\ &= \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{2t^3}{3} + t\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{3t^3}{3} - t\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{t^2}{2} + t\right)\hat{\mathbf{k}} \\ &= \left(\frac{2}{3}t^3 + t + 1\right)\hat{\mathbf{i}} + (t^3 - t)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}$$



Анимирано движение на частицата може да бъде намерено във файла *Lecture2.nb*.

За да можем да използваме зависимостите между трите основни величини, както направихме в горния пример, трябва да знаем ускорението във всеки момент от време. Класическата механика се основава на трите закона на Нютон, които ни позволяват съставянето на математически модели, описващи движението на частица в пространството.

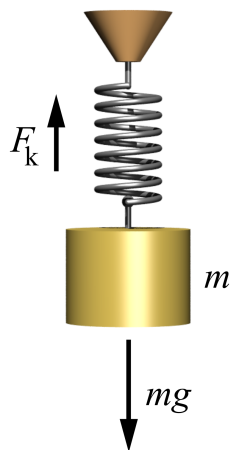
- **Първи закон на Нютон.** В отсъствието на външни сили, гледан от инерциална координатна система, обект в покой остава в покой, а обект в движение продължава движението си с константна скорост.

### Н.В. 3

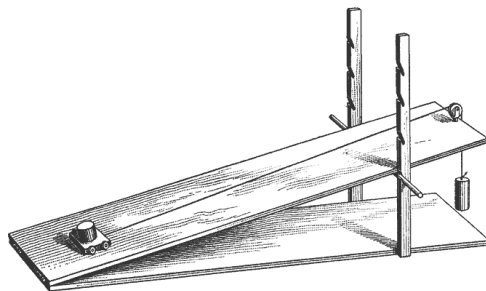
Силите, които не са компенсирани от други сили, са причина за **промяна** в движението. Движение обаче може да съществува без сили, действащи върху тялото.

В частност, за да бъде една система в покой, всички сили, действащи върху всяка от компонентите ѝ, трябва да се компенсират.

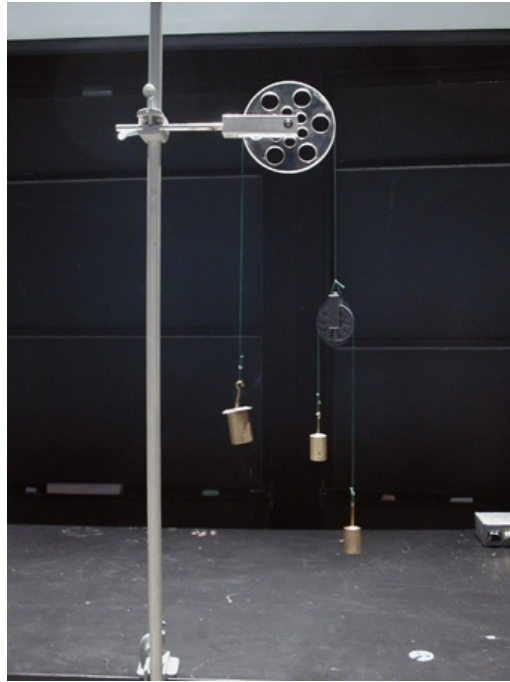
**Пример 7.** За да бъде следната система от пружина и маса в покой, то еластичната сила на пружината и силата на тежестта трябва да се уравновесяват.



**Пример 8.** Блокчето ще бъде в покой върху наклонената равнина, ако силата на тежестта, силата на триене, силата на опън и нормалната реакция на опората се уравновесяват.



**Пример 9.** За да бъде следната система от теглилки и макари в покой, то върху всяка теглилка поотделно силата на опън и силата на тежестта трябва да се компенсират.



- **Втори закон на Нютон.** Вторият закон на Нютон е в основата на математическото моделиране на движение на тяло. Той гласи, че резултантната сила, действаща върху тялото, води до ускорение, съгласно равенството

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

където  $m$  е масата на тялото. По същество това представлява едно диференциално уравнение от втори ред за позицията  $\mathbf{r}$ ,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\mathbf{F}}{m}$$

или система от диференциални уравнения от първи ред:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\mathbf{F}}{m}. \end{aligned}$$



**N.B. 4**

Важно е да отбележим, че законите на Нютон, както и повечето закони, описващи заобикалящия ни свят, се базират изключително на експериментални наблюдения.

**Те не могат да бъдат доказани, но отговарят на всички експериментални сведения в рамките на възможната точност на измерванията.**

Да отбележим и че **винаги, когато разглеждаме даден математически модел, ние трябва да се съобразяваме с неговите допускания, областта му на валидност и т.н.**

Вторият закон на Нютон е в сила при константна маса. За променлива маса ще коментираме по-нататък в курса.

Също така, трябва да се има предвид, че вторият закон на Нютон не е в сила за тела, движещи се със скорост, близка до тази на светлината (тяхното движение се описва от теорията на относителността на Айнщайн), както и за много малки тела, например електрони, атоми (те се описват от квантовата механика). Движението на повечето тела, които ни заобикалят обаче, може да бъде моделирано с помощта на Нютоновата механика.

- **Трети закон на Нютон.** Ако дадено тяло  $A$  действа със сила  $\mathbf{F}_{AB}$  на друго тяло  $B$ , то тялото  $B$  действа на  $A$  със сила  $\mathbf{F}_{BA}$ , която има същата големина като  $\mathbf{F}_{AB}$  и противоположна посока.

И така, за да моделираме движението на дадено тяло, ние трябва да опишем силите, действащи върху него. Сега ще разгледаме някои от основните сили, които могат да действат на даден обект.

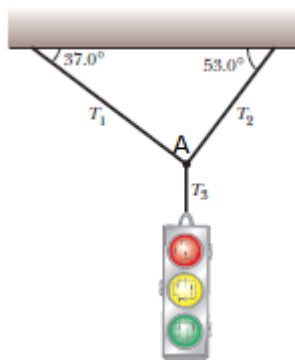
- **Сила на тежестта.** Силата на тежестта ще означаваме с

$$\mathbf{F}_g = mg,$$

където  $|\mathbf{g}| = g$ .

- **Сила на опън.**

**Пример 10.** Светофар, тежащ  $122\text{N}$  виси от кабели, както е показано на фигурата.

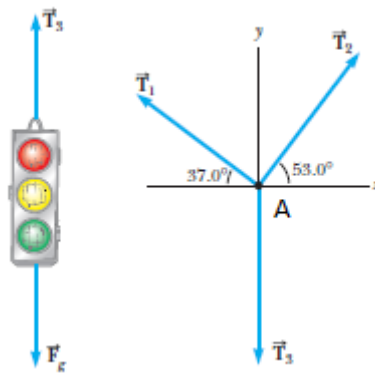


Горните кабели могат да издържат на натоварване до 100N. Искаме да разберем дали те ще се скъсат.

За да бъде системата в равновесие, резултантната сила върху всеки елемент от нея трябва да бъде нула. За да можем да напишем уравнения, съответстващи на баланса на силите, ще работим в координатна форма. Въвеждаме координатна система с начало във възела  $A$ , както е показано на картинката по-долу.

Да разгледаме елементите на механичната система поотделно. Върху светофара действат сила на тежестта  $F_g$  и сила на опън  $T_3$ . За да бъде светофарът в равновесие, трябва да е изпълнено

$$\mathbf{T}_3 = 122\hat{\mathbf{j}}.$$



Сега да видим какви са условията за равновесие в точката  $A$ . За да се компенсират силите, то всяка компонента на резултантната сила трябва да е нула.

В  $x$ -направление (т.е. ако вземем компонентите на силите върху  $\hat{\mathbf{i}}$ ) имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_2 \cdot \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{T}_1 \cdot \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{T}_3 \cdot \hat{\mathbf{i}} &= 0, \\ \|\mathbf{T}_2\| \cos 53^\circ - \|\mathbf{T}_1\| \cos 37^\circ &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично в  $y$ -направление получаваме

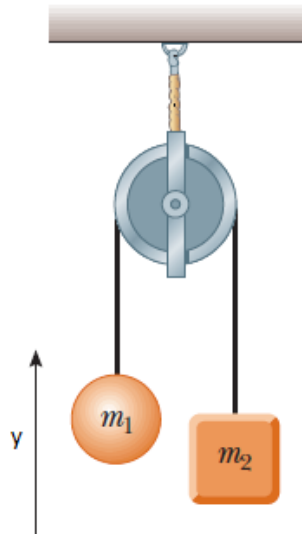
$$\|\mathbf{T}_2\| \cos 53^\circ + \|\mathbf{T}_1\| \cos 37^\circ - 122 = 0.$$

Решаваме за  $\|\mathbf{T}_1\|$  и  $\|\mathbf{T}_2\|$  и получаваме  $\|\mathbf{T}_1\| = 73.4N$ ,  $\|\mathbf{T}_2\| = 97.4N$ . Следователно кабелите ще издържат.

### N.B. 5

За да бъде една механична система в покой, всички нейни компоненти трябва да са в покой, т.е. всички сили, които им действат, да се уравновесяват.

**Пример 11** (Машина на Atwood). Разглеждаме следната експериментална постановка, която понякога се използва за измерване на земното ускорение, като приемаме, че въжето не е еластично и е с пренебрежима маса.



Очевидно, ако  $m_1 \neq m_2$ , системата няма да е в покой. Ще анализираме тази система, като определим ускорението и напрежението във въжето (т.е. величините, които не са ни известни).

На телата действат сила на тежестта, насочена в направление  $-\hat{\mathbf{j}}$  и сила на опън с големина  $T$  в направление  $\hat{\mathbf{j}}$ . Да обърнем внимание, че големините на силите на опън са едни и същи за двете тела. Тогава от втория закон на Нютон имаме

$$m_1 a_1 = T - m_1 g,$$

$$m_2 a_2 = T - m_2 g.$$

Получихме алгебрична система от две уравнения с три неизвестни  $a_1, a_2, T$ . За да я затворим, ни е необходимо още едно уравнение. То се получава от факта, че двете тела са свързани и следователно ще се движат с едно и също по големина ускорение, но с различна посока (ако едното тяло се движи и ускорява надолу, то другото ще се движи и ускорява нагоре) т.е.  $a_1 = -a_2 = a$ . Така получаваме

$$(m_1 + m_2)a = (m_2 - m_1)g.$$

Последното уравнение означава, че ако измерим ускорението  $a$  на системата, ще можем да определим константата  $g$  за съответните географски координати.

За силата на опън получаваме

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

**Пример 12.** В час, на база на горната експериментална постановка с маси  $m_1 = 50g \pm 10g$  и  $m_2 = 60g \pm 10g$ , измерихме земното ускорение и показахме, че то е  $9 \pm 1m/s^2$ . За целта измерихме времето, за което системата изминава  $20.2 \pm 0.2cm$  и установихме, че то е  $0.7 \pm 0.1s$ . Оттам определихме ускорението  $a$ , което при равноускорително движение (от спокойно състояние) лесно се вижда, че е свързано с изминатото разстояние  $\Delta r$  по следния начин:

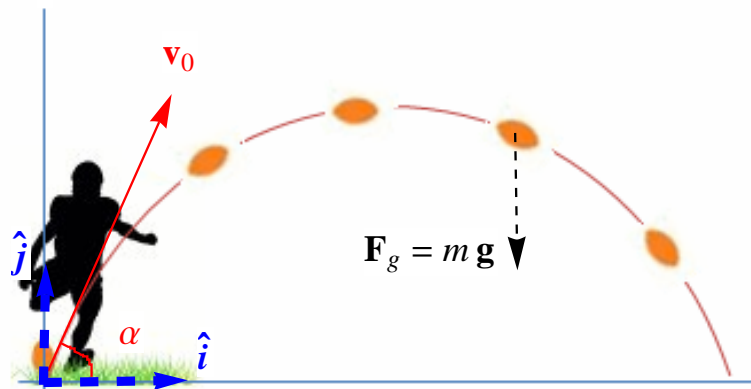
$$\Delta r = \frac{1}{2}at^2.$$

### Н.В. 6

Без знание за точността на измерванията и отчитане на възможните грешки, всички количествени резултати са абсолютно безсмислени!

**Пример 13** (Движение на снаряд без съпротивление). Следващият пример е класически и илюстрира съставянето на математически модел на движението на частица чрез разглеждане на покомпонентния баланс между действащите сили. Този подход е необходим при изследване на движението на тяло в  $2D$  и  $3D$ .

И така, нека разгледаме движението на снаряд, изстрелян под ъгъл  $\alpha$  с начална скорост  $\mathbf{v}_0$ . Ако приемем, че съпротивлението на въздуха е пренебрежимо, искаме да определим траекторията на снаряда.



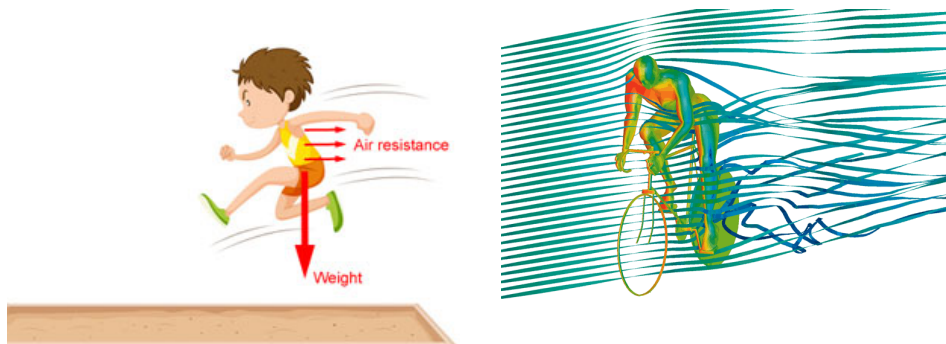
При така направените предположения, единствената сила, която действа на снаряда, е силата на тежестта,  $\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{j}}$ , и следователно няма ускорение в направление  $x$ . В  $y$ -направление имаме  $a_y = -g$ . Следователно

$$\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}}.$$

Получаваме последователно

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 - gt\hat{\mathbf{j}} \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{v}_0t - gt^2/2\hat{\mathbf{j}} \\ &= (\|\mathbf{v}_0\| \cos \alpha)t\hat{\mathbf{i}} + (\|\mathbf{v}_0\| \sin \alpha t - 1/2gt^2)\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$

- **Сила на съпротивление.** При движение на тяло през флуид, на тялото действа сила на съпротивление, която е в посока обратна на вектора на скоростта.



Съществуват различни параметризации/емпирични модели, които я описват. Класическите са:

- При ниски скорости, съпротивлението, действащо върху обект, движещ се през вискозна среда, често се моделира като

$$\mathbf{R} = -b\mathbf{v},$$

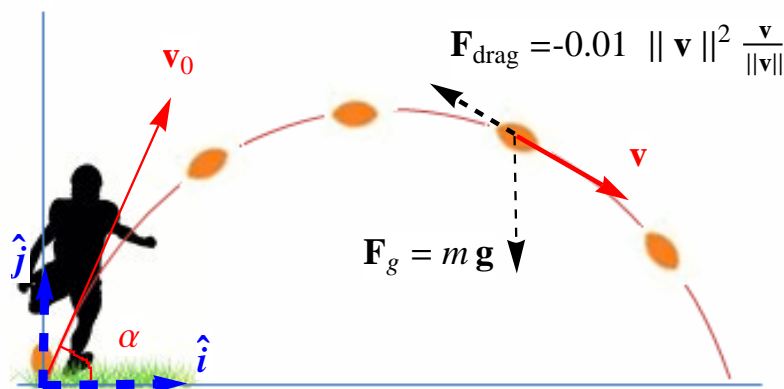
където  $b$  е константа, зависеща от характеристиките на средата и формата и размерите на обекта.

- За големи обекти, движещи се с висока скорост през въздух, например самолети, бейзболни топки и др., съпротивлението се моделира като

$$\|\mathbf{R}\| = \frac{1}{2}D\rho Av^2,$$

където  $D$  е емпирична константа (англ. *drag coefficient*),  $\rho$  е плътността на въздуха,  $A$  е сечение на обекта с равнина, перпендикулярна на посоката на движение.

**Пример 14** (Продължение на задачата за снаряда). Нека към модела на движение на снаряд добавим съпротивлението на въздуха с големина  $0.01v^2$ .



Тогава резултантната сила е

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - 0.01\|\mathbf{v}\|^2 \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Последното всъщност представлява едно диференциално уравнение за  $\mathbf{v}$ :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} - \frac{0.01\|\mathbf{v}\|^2}{m} \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

На упражнения това диференциално уравнение ще бъде решено с цел да се симулира движението на снаряд. Ще бъдат сравнени траекториите при наличие на съпротивление и когато съпротивлението се пренебрегва.

Да отбележим, че в координатна форма, по отношение на стандартните декартови координати, можем да запишем горното векторно ОДУ по следния начин:

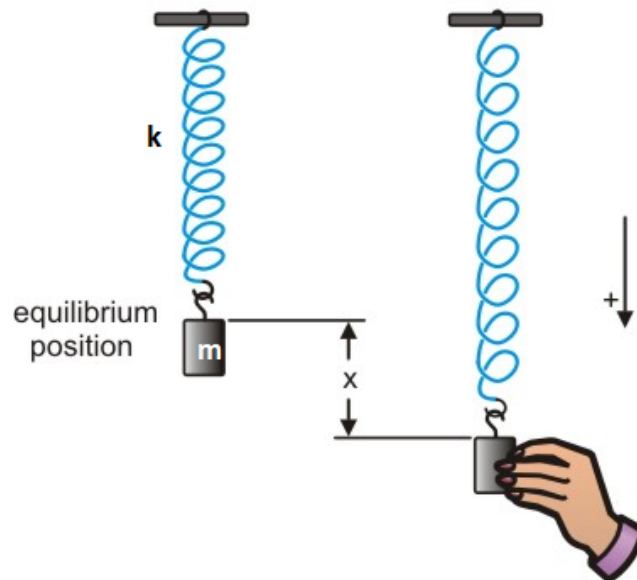
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} - \frac{0.01\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{m} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

- **Еластични сили. Закон на Хук за линейна еластичност.** При деформирането на едно еластично тяло, например пружина, в тялото възникват еластични сили, които се стремят да върнат тялото в спокойно състояние. Естествено е, че колкото по-големи са деформациите, толкова по-големи са възникващите еластични сили (и напрежения). Тази зависимост не е задължително линейна. За различните материали тя се изследва на базата на експерименти и се задава с т.нар. конститутивни закони. Ние ще говорим по-подробно по този въпрос по-късно в курса. Тук ще се спрем на най-простата зависимост – законът на Хук за линейната еластичност. Той гласи, че възникващите еластични сили са пропорционални на деформацията,

$$F = -kx,$$

където  $k$  е коефициент на еластичност и характеризира материала, от който е направено тялото. Много тела удовлетворяват с достатъчно добра точност закона на Хук (ще уточним този въпрос, когато говорим за еластични непрекъснати среди). Класически пример за такива тела са пружините.

**Пример 15** (Система от пружина и маса). Нека разгледаме следната система от пружина и маса:



Насочвайки положителната посока на оста  $Ox$  надолу и поставяйки началото на координатната система в точката, отговаряща на неразтегнатото състояние на пружината, от втория закон на Нютон получаваме следния модел, описващ позицията  $x(t)$  на тялото, като пренебрегваме съпротивлението на въздуха.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{kx}{m},$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0.$$

Ако отчетем и съпротивлението на въздуха, моделът добива вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{kx}{m} - \frac{\mu_{drag}}{m} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \operatorname{sgn} \left( \frac{dx}{dt} \right),$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = v_0.$$

- **Сила на триене** При движението на едно твърдо тяло върху друго възникват (кинетични) сили на триене, които действат в посока, обратна на посоката на движение. Експериментално е установен законът  $\|\mathbf{F}_{fr}\| = k\|\mathbf{F}_N\|$ , където  $\mathbf{F}_N$  е реакцията на опората, а  $k$  е коефициент на триене, който зависи от триещите се повърхности. На упражнението ще бъде разгледан модел на движение на тяло по наклонена равнина при наличието на триене.

Примерите, разгледани в настоящия параграф, са сравнително прости, но те отразяват идеите, необходими за моделирането на механична система, чиито компоненти могат да се идеализират като частици. Единствената разлика в една приложна задача би била наличието на много повече компоненти на механичната система.

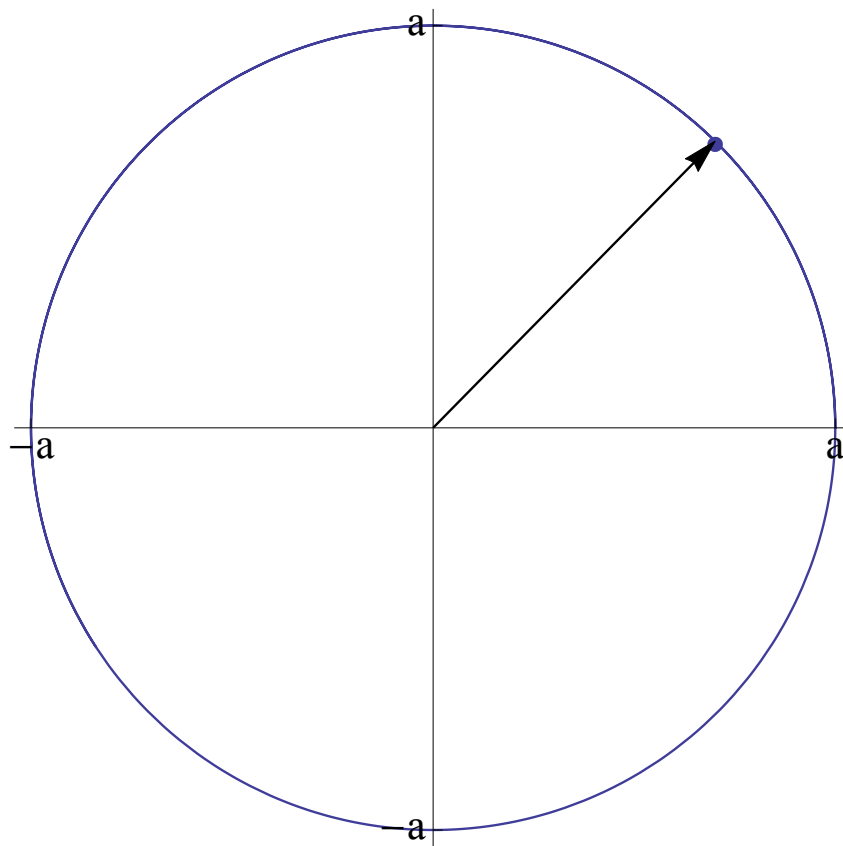
### Движение по окръжност и по криволинейна траектория. Тангенциална и нормална компонента на ускорението. Кривина.

Движението по окръжност е частен случай на движение по криволинейна траектория. Неговото разглеждане ще ни позволи да разберем какви са силите, действащи върху един обект, когато не се движи по права линия.

Най-простият случай, от който ще започнем, е движението по окръжност с константна ъглова скорост  $\omega$  на частица с маса  $m$ . Нейната позиция тогава е

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} + a \sin \omega t \hat{\mathbf{j}},$$

където  $a$  е радиусът на окръжността. Анимирано движение на частицата може да бъде намерено във файла *Lecture3.nb*.



Основният въпрос, на който ще се опитаме да отговорим, е действа ли сила на обекта и, ако да, каква.

На първата част на въпроса може да се отговори веднага утвърдително, тъй като очевидно векторът на скоростта (по-точно неговата посока) постоянно се променя. Имаме

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d}{dt}(-a\omega \sin \omega t \hat{\mathbf{i}} + a\omega \cos \omega t \hat{\mathbf{j}}) \\ &= -a\omega^2 \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} - a\omega^2 \sin \omega t \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned}$$



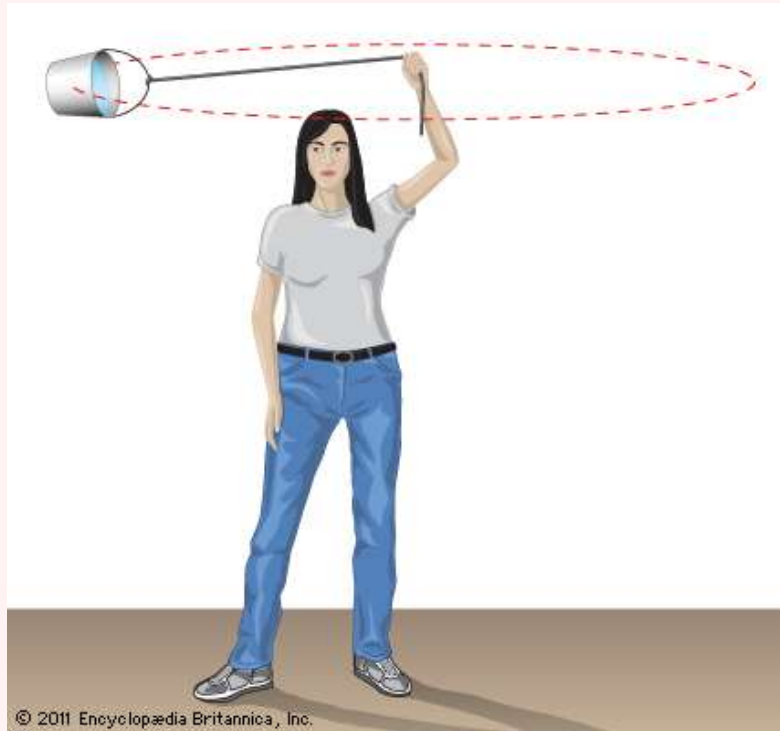
Следователно, за да може едно тяло да се движи по окръжност, трябва да има сила, която го кара да прави това. За нея е изпълнено

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t) &= m\mathbf{a}(t) \\ &= -m\omega^2(a \cos \omega t \hat{\mathbf{i}} + a \sin \omega t \hat{\mathbf{j}}) \\ &= -m\omega^2 \mathbf{r}(t).\end{aligned}$$

С други думи, за да се движи тялото по окръжност, на него трябва да му действа сила с посока, обратна на радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . Такава сила ще наричаме центростремителна.

### N.B. 7

Центростремителната сила не е специален нов вид сила, която действа на телата, защото те се движат по криволинейна траектория. Това е някоя известна сила (например сила на опън, сила на триене и др.), която в конкретния случай кара тялото да се движи по такъв начин. Например в следния случай ролята на центростремителна сила играе силата на опън на въжето, с което тялото е вързано към центъра на окръжността:



### N.B. 8

Понятието центростремителна сила не бива да се бърка с понятието центробежна сила. Първата е реална сила, докато втората е фиктивна и е математическа абстракция в случаите, когато работим в не-инерциална координатна система. Ще говорим за такива сили по-нататък в курса.

Нека сега разгледаме произволно (не задължително равномерно) криволинейно движение. Имаме

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{T} =: v\mathbf{T}.$$

Диференцирайки двете страни по отношение на  $t$ , получаваме

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt}\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}. \quad (1.1)$$

Ще покажем, че последното е еквивалентно на

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = v'\mathbf{T} + \varkappa v^2\mathbf{N} = v'\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}, \quad (1.2)$$

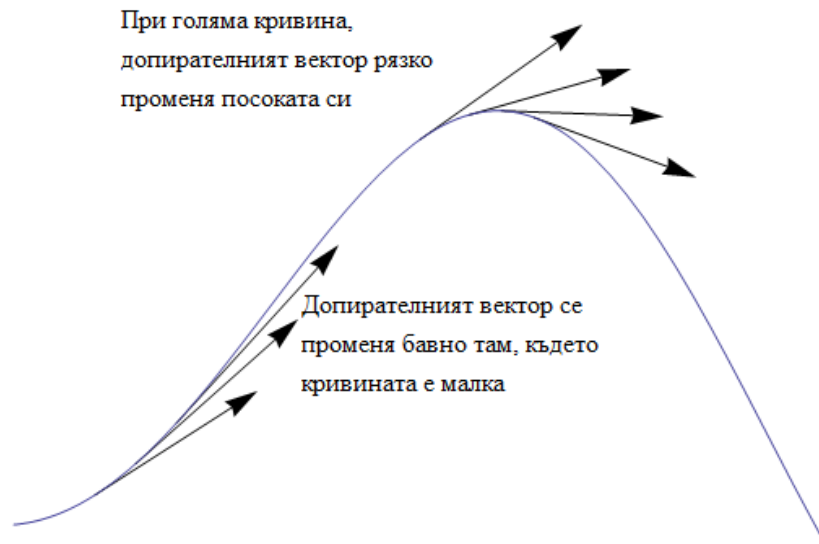
където  $\varkappa$  е кривината, а  $\rho$  – радиусът на кривина на кривата, определена от  $\mathbf{r}(t)$ . Последното е в съответствие с резултата, който получихме за равномерно движение по окръжност, където  $v' = 0$ . За тази цел трябва първо да изясним понятието кривина на крива.

### Н.В. 9

Уравнение (1.2) на практика представлява разлагане на ускорението по **локален базис** на тангенциална и нормална компонента (вж. анимация, илюстрираща локалния базис във файла Lecture3.nb).

### Кривина и радиус на кривина.

Нека разгледаме следната фигура:



Интуитивно е ясно, че там, където  $\mathbf{T}$  мени посоката си по-бързо, кривата има по-голяма “кривина”.

### Дефиниция 7

Дефинираме понятието **кривина** чрез

$$\varkappa := \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|.$$

Обикновено е по-удобно да пресмятаме кривина, като използваме еквивалентната дефиниция

$$\varkappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \quad (1.3)$$

**Пример 16.** Кривината на права във всяка точка е 0, тъй като  $\mathbf{T}$  не сменя посоката си.

**Пример 17.** Кривината на окръжност е  $\varkappa = 1/\rho$ , където  $\rho$  е радиусът на окръжността. Действително, нека параметризираме окръжността по следния начин:

$$\mathbf{r}(t) = \rho \cos t \hat{\mathbf{i}} + \rho \sin t \hat{\mathbf{j}}.$$

За единичния допирателен вектор получаваме

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} / \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = -\sin t \hat{\mathbf{i}} + \cos t \hat{\mathbf{j}}.$$

Сега, използвайки (1.3), получаваме окончателно

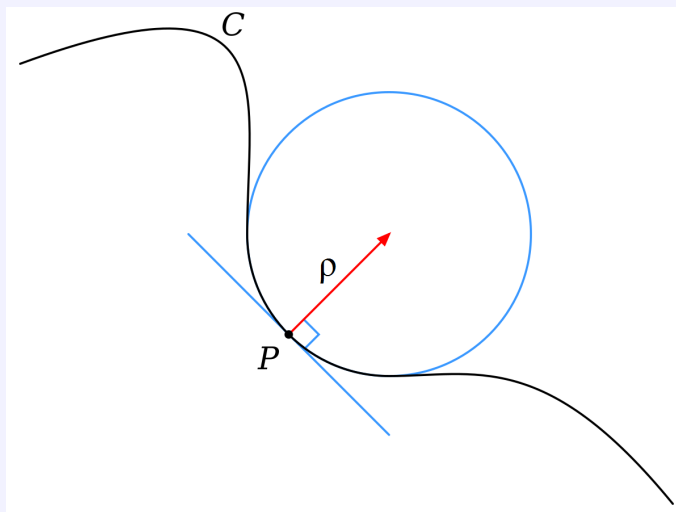
$$\varkappa = 1/\rho.$$

### Дефиниция 8

Дефинираме **радиус на кривина** на крива в дадена точка чрез

$$\rho := 1/\varkappa.$$

С други думи, това е радиусът на окръжността, която можем да поставим в дадената точка и има същата кривина като кривата. Тази окръжност ще наричаме **окръжност на кривина**.



Вече сме готови да се върнем към движението на частица по криволинейна траектория. За да докажем (1.2), е достатъчно да докажем

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \varkappa v \mathbf{N}.$$

От (1.3) имаме

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \varkappa \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \varkappa v.$$

Остава да докажем, че  $\mathbf{N}$  задава посоката на  $d\mathbf{T}/dt$ , т.е. че  $d\mathbf{T}/dt \perp \mathbf{T}$ . Действително, получаваме

$$0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt}.$$

### N.B. 10

Движението по криволинейна траектория винаги е ускорително. Нормалната компонента на ускорението е  $\kappa v^2$ , а тангенциалната е  $v'$ . С други думи, нормалната компонента отговаря за промяната в посоката на движение, а тангенциалната – за забързването/забавянето на тялото (т.е. за промяната в скаларната скорост). Последното изглежда естествено. При рязък завой (т.е. голямо  $\kappa$ ), пътникът в един автомобил бива отхвърлен към прозореца (т.е. в посока, нормална на движението). При рязко натискане/отпускане на педала на газта (т.е. голямо  $v'$ ), пътникът “се залепя” за седалката или полита напред, т.е. в тангенциална на движението посока.

Нека в допълнение отбележим следния важен резултат, който получихме.

### Твърдение 4

Единичната нормала се определя от

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|}.$$

**Пример 18.** Нека е дадена частица, която се движи по траекторията  $\mathbf{r}(t) = (t^2, t^2, t^3)^T$ ,  $t \geq 0$ . Да намерим тангенциалната и нормалната компонента на ускорението. Вземайки предвид (1.2), тангенциалната компонента е  $v'$ , а нормалната –  $\kappa v^2$ . Имаме последователно

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{r}'(t) = (2t, 2t, 3t^2)^T, \\ v(t) &= \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}, \\ v'(t) &= \frac{2(4 + 9t^2)}{\sqrt{8 + 9t^2}}. \end{aligned}$$

За единичния тангенциален вектор имаме

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{r}'(t)/\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{8 + 9t^2}}(2, 2, 3t)^T$$

и следователно

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{(9t^2 + 8)^3}}(-18t, -18t, 24)^T.$$

Тогава за кривината имаме

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{6\sqrt{2}}{t\sqrt{(9t^2 + 8)^3}}.$$

Така окончателно получаваме за нормалната компонента на ускорението

$$\kappa v^2 = \frac{6\sqrt{2}t}{\sqrt{8+9t^2}}.$$

---

## Допълнителни задачи

**Задача 1.** Нека позицията на частица се описва от  $x_1 = 3 \sin t$ ,  $y_1 = 2 \cos t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , а на друга частица от  $x_2 = -3 + \cos t$ ,  $y_2 = 1 + \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

1. Нарисувайте графиките на двете траектории.
2. Някои от пресечните точки точки на сблъскване ли са?
3. Променя ли се нещо, ако  $x_2 = \cos t$ ,  $y_2 = 1 + \sin t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ?

**Задача 2.** Намерете функцията, която описва движението на частицата, и нарисуйте нейната траектория, ако:

- (а)  $\mathbf{a}(t) = 2t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$ .
- (б)  $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

Намерете тангенциалната и нормалната компонента на ускорението.

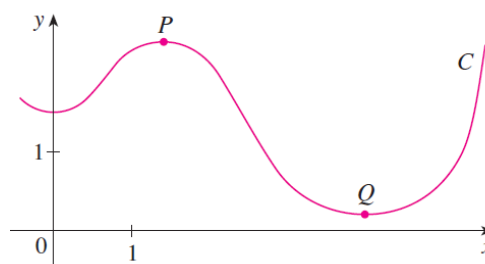
**Задача 3.** Намерете кривината на параболата  $y = x^2$  в т.  $(1, 1)$ . Къде кривината е най-голяма? (Преди да пресметнете направете хипотеза.)

**Задача 4.** Да се намери кривината на  $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)^T$  в т.  $(0, 0, 0)$ .

**Задача 5.** Постройте графиката на  $\mathbf{r}(t) = (\sin 3t, \sin 2t, \sin 3t)^T$ . В колко точки изглежда, че  $\kappa(t)$  достига локален и глобален максимум? Пресметнете  $\kappa(t)$  (използвайте системата *Mathematica*) и сравнете вашата хипотеза.

**Задача 6.** Дадена е кривата  $C$ .

- Посочете коя е по-голяма – кривината в т.  $P$  или кривината в т.  $Q$ ?
- Намерете кривината в т.  $P$  и в т.  $Q$ , като нарисувате допирателните окръжности към кривата в точките.



### 1.3 Скаларни функции на векторен аргумент. Линеаризация. Градиент. Производна по направление.

В тази тема:

(Черно – вече разгледано в предходните теми, синьо – предмет на изучаване в настоящата тема, червено – предстои в следващите теми)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D(\mathbf{x}, t, u)\nabla u + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)u) + f(\mathbf{x}, t, u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI,$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I.$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

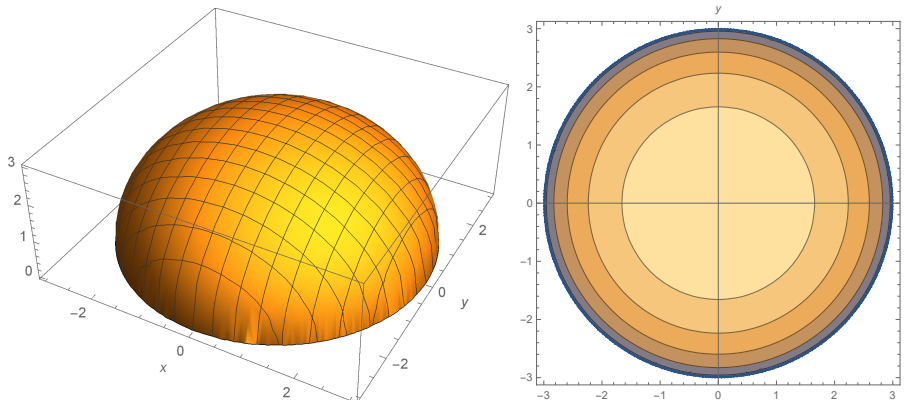
Както отбелязахме, обикновено величините в разглеждан процес зависят от точката в пространството  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  и времето  $t$ . Разбира се, независимите променливи могат да бъдат и други. С други думи, често е необходимо разглеждането на функции на няколко променливи, например:

- температурата  $u(x, y) = u(\mathbf{x})$ ,  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ;  $u(x, y, z, t) = u(\mathbf{x}, t)$ ,  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ;
- плътността  $\rho(\mathbf{x})$ ;
- налягането  $p(\mathbf{x})$ .

Ще разгледаме работата със скаларни функции на векторен аргумент в 2D, тъй като в повече измерения визуализацията е трудна, но идеите са в сила при произволен брой аргументи.

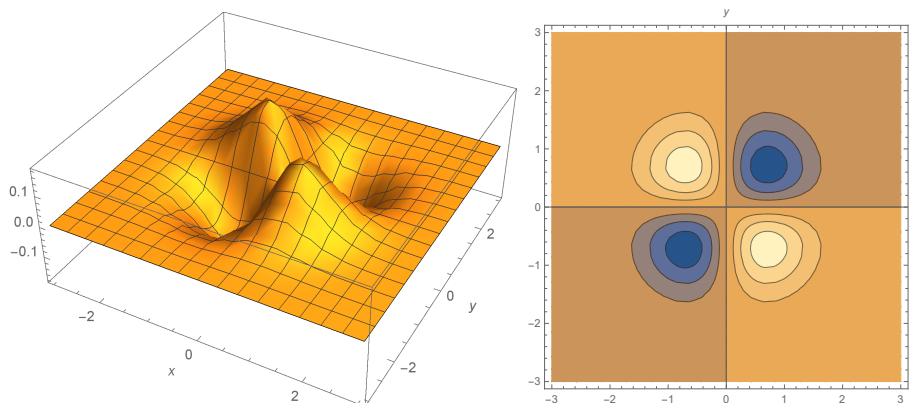
Съществуват два основни начина да визуализираме функция на две променливи – 3D графика (повърхнина) и графика с линии на ниво.

**Пример 19.** Разглеждаме функцията  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . Тя може да бъде визуализирана по един от следните два начина:



Линиите на ниво са окръжности с център – началото на координатната система. Следователно функцията зависи само от разстоянието между точката  $(x, y)$  и началото на координатната система. В него се достига и единственият максимум на функцията. Да обърнем внимание, че функцията има смисъл само в кръга  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$ . Това ясно се вижда и от двете графики.

**Пример 20.** Сега нека визуализираме поведението на  $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$ .



Както виждаме, функцията има два минимума и два максимума, които са симетрични по отношение на началото на координатната система.

Да обърнем внимание на факта, че там, където функцията се изменя бързо, линиите на ниво са много по-близко една до друга, а там, където функцията почти не се изменя, те на практика отсъстват.

Както и при функциите на скаларен аргумент, ще започнем изучаването на функциите на векторен аргумент, като първо въведем понятието граница.

### Дефиниция 9

Казваме, че

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L,$$

ако за всяко  $\varepsilon > 0$  съществува  $\delta = \delta(\varepsilon)$ , така че ако  $\rho((x, y), (a, b)) < \delta$ ,  $(x, y) \neq (a, b)$ , тогава  $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ .

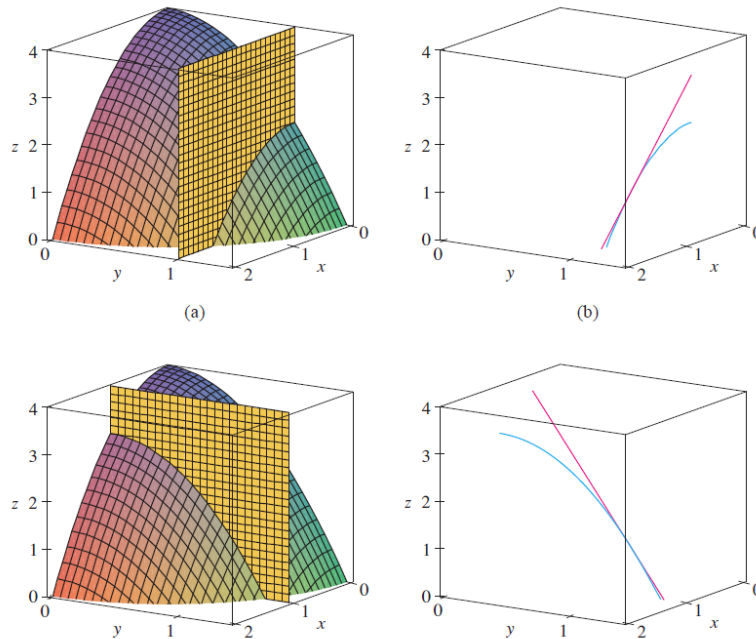
За разлика от едномерния случай, в който аргументът може да приближава граничната стойност само от две посоки (говорим за лява и дясна граница), то в многомерния това може да става по безброй много пътища. За да съществува граница, то стойността, към която се приближаваме, трябва да е една и съща от всички посоки. Ако по два пътя стойностите са различни, граница не съществува. Примери ще бъдат дадени на упражнения.

Имайки понятието за граница, можем да въведем понятието производна. В многомерния случай има няколко различни понятия, които “играят ролята” на производните в 1D. За всички тях обаче основни са частните производни. Оказва се, че в някакъв смисъл е достатъчно да знаем как функцията се изменя в две посоки (тъй като сме в 2D пространство), за да разберем всичко за нея. Частните производни се дефинират, както следва:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Геометрично, частните производни дават наклона на допирателните в съответните направления:



### N.B. 11

Вземайки предвид дефиницията за производна, съвсем естествено се получават мерните единици на производните. Например ако температурата  $T$  се измерва в градуси, а  $x$  – в метри, тогава  $\frac{\partial T}{\partial x}$  се измерва в  $^\circ/m$ ; ако отместването  $x$  се измерва в  $m$ , а времето – в  $s$ , тогава  $\frac{\partial x}{\partial t}$  се измерва в  $m/s$  и т.н.

В 1D допирателните са свързани с една от най-важните идеи в анализа – линеаризацията – в достатъчно малка околност на дадена точка, функцията и

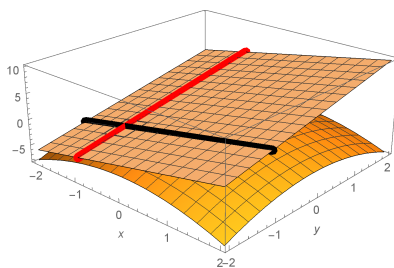


допирателната ѝ стават на практика неразличими, т.е. можем да апроксимираме функцията с нейната линеаризация. Знаем, че линеаризацията на скалярна функция на една променлива се задава с

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O(|2|).$$

Сега ще изведем аналогичен резултат за скалярна функция на две променливи. Той може лесно да бъде обобщен за функции на повече променливи.

Търсим линеаризацията на  $z = f(x, y)$  около точката  $x_0, y_0$ , т.е. допирателната равнина в тази точка. Очевидно тя е еднозначно определена от две прави, например в  $x$ - и  $y$ -направление, съответстващи на частните производни по отношение на  $x$  и  $y$ .



Общият вид на равнина  $\alpha$  е

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

и, вземайки предвид, че  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \alpha$ , следва, че

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cf(x_0, y_0)$$

и тогава уравнението на равнината добива вида

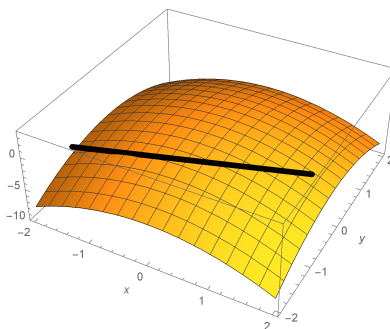
$$z = f(x_0, y_0) + \bar{A}(x - x_0) + \bar{B}(y - y_0),$$

където  $\bar{A} = A/C$ ,  $\bar{B} = B/C$ .

Сега остава да използваме информацията, която имаме в направления  $x$  и  $y$ . Ако поставим  $y = y_0$ , имаме

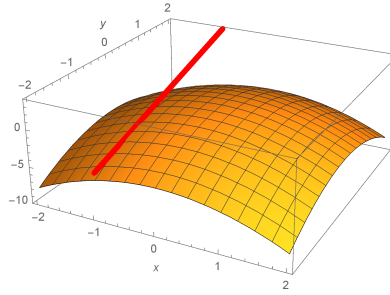
$$z = f(x_0, y_0) + \bar{A}(x - x_0)$$

и разглеждаме допирателната равнина в направление  $x$ :



Следователно  $\bar{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Аналогично при  $x = \bar{x}$ , получаваме допирателната в  $y$ -направление:



и тогава  $\bar{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ .

Окончателно за линеаризацията на  $f(x, y)$  около  $(\bar{x}, \bar{y})$  получаваме

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0).$$

Записано във векторен вид, последното е еквивалентно на

$$f(\bar{\mathbf{x}}) + \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}).$$

Векторът, съдържащ производните в двете главни направления (т.е. частните производни) се среща често във векторния анализ и затова заслужава специално име. Този факт е естествен, тъй като, както отбелязахме, поведението на функцията в двете главни направления би трябвало да е достатъчно, за да опише (в някакъв смисъл) поведението ѝ в 2D.

### Дефиниция 10

Векторът от частните производни на функцията  $f(x_1, \dots, x_n)$  се нарича градиент и се бележи с

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Нека сега формулираме общия вид на изведената линеаризация.

### Твърдение 5

Линеаризацията на скалрната функция  $f(x_1, \dots, x_n)$  около точката  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  се задава с

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} (x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} (x_n - \bar{x}_n).$$

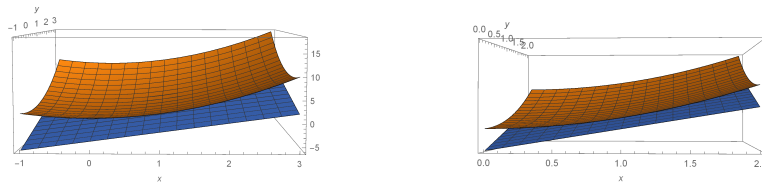
Използвайки векторна нотация, горното означава, че

$$f(\mathbf{x}) = f(\bar{\mathbf{x}}) + \nabla f|_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + O(|2|).$$

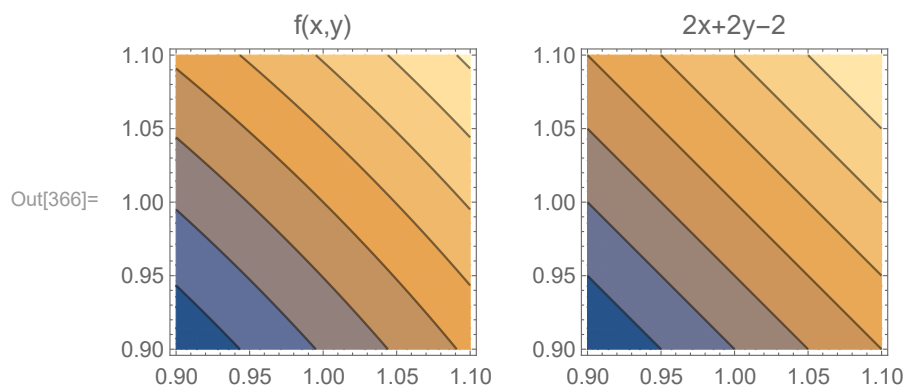
**Пример 21.** Да намерим допирателната равнина към графиката на  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  в точката  $(1, 1, 2)$ . Тя се определя от

$$\begin{aligned} z &= f(1, 1) + \nabla f(1, 1) \cdot (x - 1, y - 1) = 2 + (2x, 2y)|_{1,1} \cdot (x - 1, y - 1) \\ &= 2x + 2y - 2. \end{aligned}$$

Както можем да видим при приближаване към точката, т.е. като построим графиката на функцията и допирателната равнина в по-малка околност на точката, двете започват да се приближават една към друга и да стават визуално неразличими (вж. интерактивна визуализация във файла *Lecture4.nb*).



Да обърнем внимание и на следния факт – в малка околност на точката, линиите на ниво на оригиналната функция са почти успоредни линии – нещо характерно за равнина.



### N.B. 12

Това е причината, поради която линеаризацията играе ключова роля в анализа, Заменяме нелинейния обект (за който често знаем много малко, липсва обща теория, работи се трудно) с линеен, който **локално** може да замени оригиналния обект. Линеината теория е много по-добре развита и често позволява да заключим важни неща за локалното поведение на оригиналния обект.

Впрочем ние можем да изведем линеаризацията на дадена функция и използвайки други съображения. Да разгледаме изменението

$$\Delta f := f(x, y) - f(x_0, y_0).$$

Нека означим още  $\Delta x := x - x_0$ ,  $\Delta y := y - y_0$ . Тогава

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)]. \end{aligned}$$

С други думи описваме изменението, като първо се движим по  $x$ , а след това по  $y$ . Последното е еквивалентно на

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \Delta x + \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} \Delta y \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y. \end{aligned}$$

В последното приближение използвахме факта, че  $\Delta x$  и  $\Delta y$  са малки числа.

Така полученият резултат ни позволява лесно да изведем и правилото за пресмятане на производна на сложна функция (англ. *Chain rule*).

### Твърдение 6

Нека имаме функцията  $f(x(t), y(t))$ . Тогава

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

*Доказателство.* Имаме

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + (|2|).$$

Делим двете страни на  $\Delta t$  и го пускаме да клони към нула, за да получим търсения резултат.  $\square$

Остана в настоящия параграф да разгледаме още едно важно понятие, необходимо при работата с функции на много променливи.

### Дефиниция 11

Производната на  $f$  в точката  $\bar{\mathbf{x}} = (x_0, y_0)$  в направление на единичния вектор  $\mathbf{u} = (a, b)$  се дефинира с границата

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{\mathbf{x}} + h\mathbf{u}) - f(\bar{\mathbf{x}})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h},$$

когато тази граница съществува.

Както можем да очакваме, производната по произволно направление може да се изрази чрез двете частни производни, тъй като оставаме върху същата равнина (определена от линеаризацията).

### Твърдение 7

Производната по направление на единичния вектор  $\mathbf{u}$  може да се изрази чрез

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

*Доказателство.* Ще дадем две доказателства. Първо, нека дефинираме

$$g(h) := f(x_0 + ha, y_0 + hb).$$

Тогава

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0).$$

Използвайки chain rule, от друга страна, имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = \nabla f \cdot \mathbf{u}.$$

Другото доказателство, което ще приведем, се основава на равенството

$$\Delta f = \frac{f(x_0 + ah, y_0) - f(x_0, y_0)}{ah} ah + \frac{f(x_0 + ah, y_0 + bh) - f(x_0 + ah, y_0)}{bh} bh.$$

Сега делим двете страни на  $h$ , което пускаме да клони към 0.  $\square$

## Какво ни дава градиентът?

Ще коментираме три много важни въпроса, свързани с градиента на дадена скалярна функция  $f$ :

1. Градиентът е вектор, който сочи в посоката на най-бързо нарастване на функцията.

*Доказателство.* Производната в направление  $\mathbf{u}$  е

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \|\nabla f\| \cos \angle(\nabla f, \mathbf{u}).$$

Последното очевидно е максимално, когато косинусът е равен на 1, т.е. когато  $\mathbf{u}$  е в същата посока като  $\nabla f$ .  $\square$

2. Компонентата (или скалярната проекция) на градиента в дадено направление дава производната на функцията в това направление. По тази причина често се използва нотацията  $\nabla_{\mathbf{u}} f$  за производна в направление  $\mathbf{u}$ .
3. Градиентът е ортогонален на линията на ниво на функцията в дадената точка.

*Забележка.* Няма да доказваме този факт, но той е естествен, тъй като градиентът сочи в посоката на най-бързо изменение, а линията на ниво описва посоката, в която функцията е константа.

**Пример 22.** Нека разгледаме следното уравнение от тип реакция-дифузия.

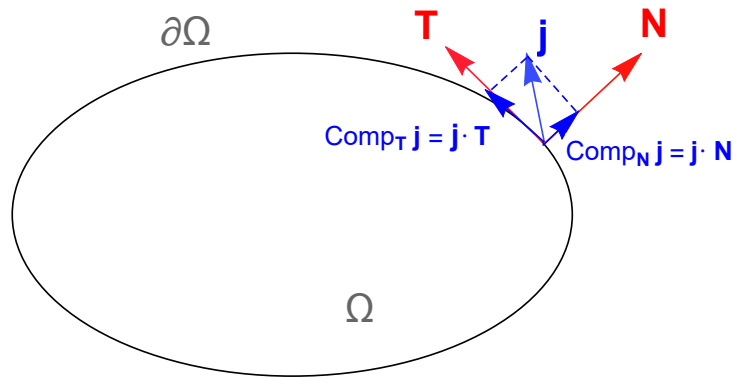
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),$$

дефинирано в дадена област  $\Omega$ . Засега няма да се спираме подробно на структурата на самото уравнение, тъй като ще разгледаме тези (всъщност по-общ клас) математически модели след две теми. Ще отбележим само, че дифузионният поток на величината  $u$ , например температура или концентрация на дадено вещество, е от места с големи към места с малки стойности. Записано математически, това означава

$$\mathbf{j}_{diff} = -D \nabla u,$$

т.е. това е вектор в посоката  $-\nabla u$  на най-бързо намаляване на  $u$ .

Ако поискаме да наложим гранично условие за нулев поток през границата (изолирана система), това означава, че компонентата на  $\mathbf{j}_{diff}$  в нормално направление трябва да е 0. Нека припомним, че всеки вектор може да бъде разложен на нормална и тангенциална компонента.



Потокът в тангенциално направление всъщност остава в областта. Т.е. ние трябва да наложим условието върху нормалната компонента:

$$\mathbf{j}_{diff} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Вземайки предвид казаното по-горе за градиентния вектор, последното условие е еквивалентно на

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0.$$

На упражнения диференциалната задача ще бъде решена и ще бъде илюстриран дифузионният поток, който е свързан с градиентното поле.

## Допълнителни задачи

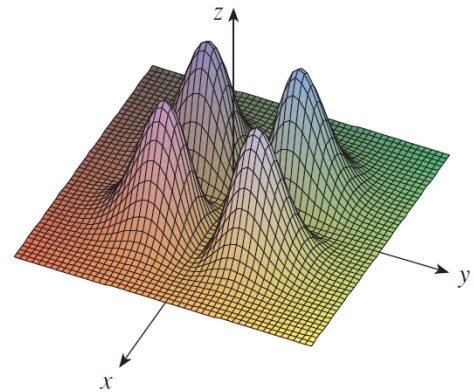
**Задача 1.** Скицирайте дефиниционното множество на функциите

- (а)  $f(x, y) = \sqrt{2x - y}$ ;
- (б)  $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ;
- (в)  $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$ .

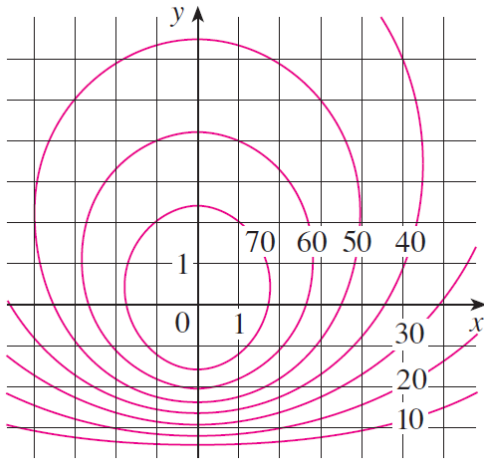
**Задача 2.** Начертайте графиките на функциите

- (а)  $f(x, y) = 1 + y$ ;
- (б)  $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$ ;
- (в)  $f(x, y) = e^{-y}$ ;
- (г)  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ .

**Задача 3.** Скицирайте на ръка линиите на ниво за функцията, чиято графика е

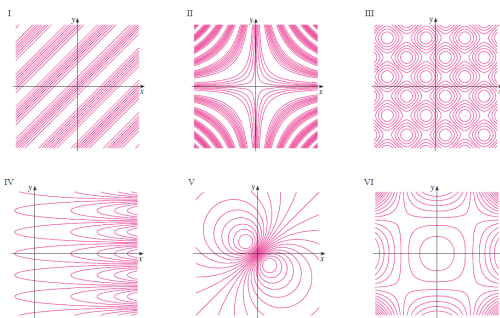
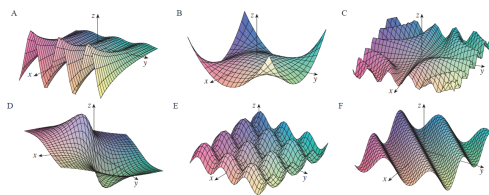


**Задача 4.** На графиката са показани линиите на ниво на функцията  $f$ . Използвайте ги, за да определите  $f(-3, 3)$  и  $f(3, -3)$ . Какво може да кажете за формата на нейната графика?



**Задача 5.** Свържете функцията с нейната графика и линиите ѝ на ниво. Обосновайте се.

- (а)  $z = \sin xy$ ;
- (б)  $z = \sin(x - y)$ ;
- (в)  $z = (1 - \sin x^2)(1 - \sin y^2)$ ;
- (г)  $z = e^x \cos y$ ;
- (д)  $z = \sin x - \sin y$ ;
- (е)  $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ .



**Задача 6.** Намерете  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , ако  $z$  е дефинирана неявно като

- (а)  $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ ;
- (б)  $e^z = xyz$ ;
- (в)  $yz + x \ln y = z^2$ .

**Задача 7.** Начертайте графиката на функцията и допирателната равнина в дадената точка. Приближете двете графики, докато станат неразличими.

- (а)  $z = x^2 + xy + 3y^2$ ,  $(1, 1, 5)$ ;
- (б)  $z = \arctan(xy^2)$ ,  $(1, 1, \pi/4)$ .

**Задача 8.** Намерете  $\frac{\partial z}{\partial s}$  и  $\frac{\partial z}{\partial t}$

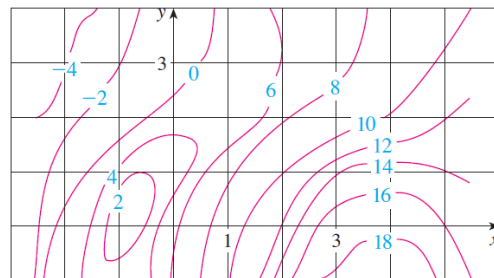
- (а)  $z = x^2y^3$ ,  $x = s \cos t$ ,  $y = s \sin t$ ;
- (б)  $z = e^r \cos \theta$ ,  $r = st$ ,  $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$ ;
- (в)  $z = \tan\left(\frac{u}{v}\right)$ ,  $u = 2s + 3t$ ,  $v = 2s - 2t$ .

**Задача 9.** Намерете градиента на функцията  $f$ . Пресметнете го и го визуализирайте в точката  $P$ . Намерете скоростта на изменение на функцията  $f$  в точката  $P$  по посока на вектора  $\mathbf{u}$ .

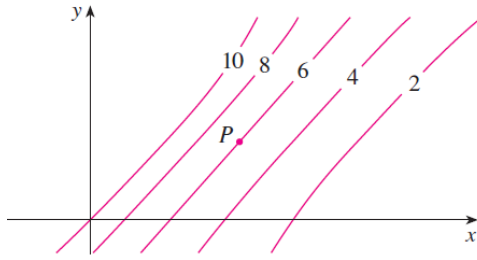
- (а)  $f(x, y) = \sin(2x + 3y)$ ,  $P(-6, 4)$ ,  $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\mathbf{i} - \mathbf{j})$ ;
- (б)  $f(x, y, z) = x^2yz - xyz^3$ ,  $P(2, -1, 1)$ ,  $\mathbf{u} = \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)^T$ ;
- (в)  $f(x, y) = y^2e^{xyz}$ ,  $P(0, 1, -1)$ ,  $\mathbf{u} = \left(\frac{3}{14}, \frac{4}{13}, \frac{12}{13}\right)^T$ ;

**Задача 10.** Функцията  $f(x, y) = \frac{x^2y^3}{2x^2 + y^2}$  има сингулярност в  $(0, 0)$ . Отстранима ли е тази сингулярност? Ако да – посочете как.

**Задача 11.** На чертежа са дадени линиите на ниво на функцията  $f$ . Използвайте ги, за да определите  $f_x(2, 1)$  и  $f_y(2, 1)$



**Задача 12.** На чертежа са дадени линиите на ниво на функцията  $f$ . Определете знаците на частните производни  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yy}$ .



**Задача 13.** Всички функции в условието на задачата са диференцируеми.

- (а) Ако  $z = f(x, y)$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , покажете че

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2;$$

- (б) Ако  $u = f(x, y)$ ,  $x = e^s \cos t$ ,  $y = e^s \sin t$ , покажете че

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \\ = e^{-2s} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

**Задача 14.** Докажете следните свойства на оператора  $\nabla$ :

(а)  $\nabla(au + bv) = a\nabla u + b\nabla v$ ;

(б)  $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$ ;

(в)  $\nabla\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}$ ;

(г)  $\nabla u^n = nu^{n-1}\nabla u$ .

**Задача 15.** Втората производна по посока на

единичния вектор  $\mathbf{u}$  се задава с  $\frac{d}{d\mathbf{u}}\left(\frac{df}{d\mathbf{u}}\right) =$

$\frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2}$ . Покажете, че

$$\frac{d^2 f}{d\mathbf{u}^2} = f_{xx}a^2 + 2f_{xy}ab + f_{yy}b^2,$$

където  $\mathbf{u} = (a, b)^T$ . Намерете втората производна на  $f(x, y) = xe^{2y}$  по посока на  $\mathbf{v} = (4, 6)^T$ .



## 1.4 Векторни функции на векторен аргумент. Дивергенция и ротация на векторно поле.

В тази тема:

(Черно – вече разгледано в предходните теми, синьо – предмет на изучаване в настоящата тема, червено – предстои в следващите теми)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D(\mathbf{x}, t, u)\nabla u + \mathbf{c}(\mathbf{x}, t)u) + f(\mathbf{x}, t, u)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \mu \Delta \mathbf{v},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

$$\frac{dS}{dt} = -\alpha SI,$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha SI - \beta I,$$

$$\frac{dR}{dt} = \beta I.$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u})$$

Често се налага да разглеждаме дадена векторна величина като функция на няколко променливи. Да дадем няколко примера.

**Пример 23** (Силово поле). Законът на Нютон за гравитацията гласи, че големината на гравитационната сила между два обекта с маси  $m$  и  $M$  е

$$|\mathbf{F}| = \frac{mMG}{r^2},$$

където  $G$  е гравитационната константа, а  $r$  е разстоянието между обектите.

Нека тяло с маса  $M$  се намира в началото на дадена координатна система и нека  $\mathbf{x}$  е радиус-векторът, съответстващ на позицията на частица с маса  $m$ . Ще формулираме закон за силата  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  действаща върху тялото с маса  $m$  първо във векторна (т.е. координатно-инвариантна) форма.

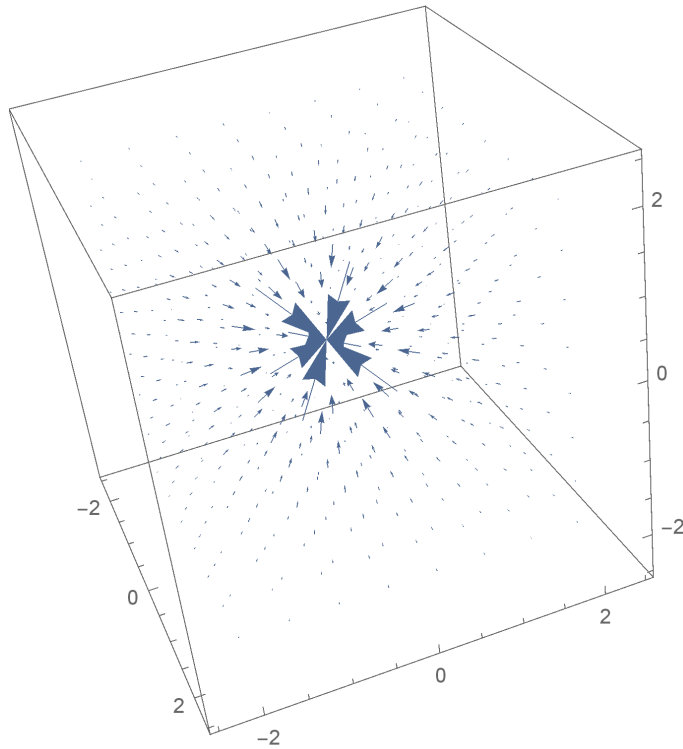
Векторът на силата  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  има посока от тялото с маса  $m$  към това с маса  $M$ . Единичният вектор, задаващ това направление, е  $-\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ . Следователно

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3}\mathbf{x}.$$

Обикновено, за да използваме закона, трябва да го запишем в координатна форма. Използвайки Декартови координати,  $\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , получаваме

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-mMGx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{-mMGy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{j} + \frac{-mMGz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\mathbf{k}.$$

Визуализираме векторното поле по-долу:



Както виждаме, силата се увеличава при приближаване до началото на координатната система.

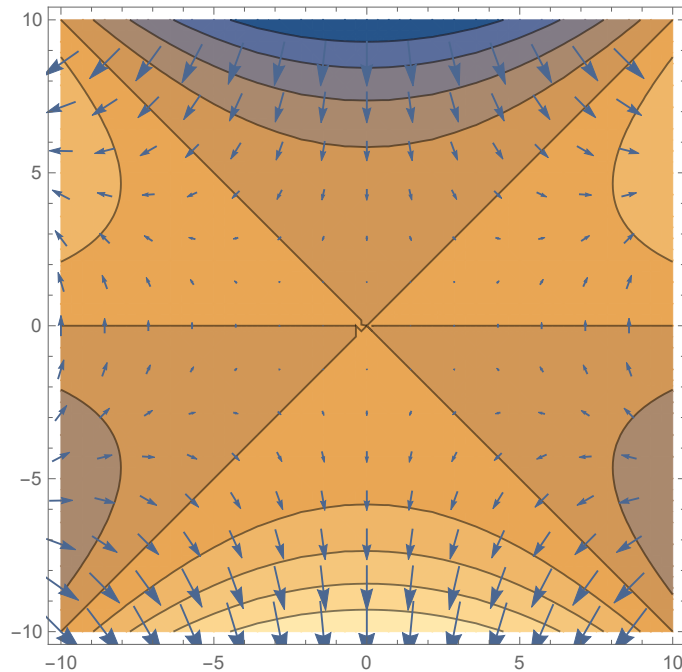
**Пример 24** (Векторно поле, описващо поток/градиентно поле). Потокът също представлява векторно поле. Например дифузионният поток на вещество с концентрация  $f(\mathbf{x})$  е свързан с градиентното поле:

$$\mathbf{j}_{diff} = -D\nabla f.$$

Нека например  $f(x, y) = -x^2y + y^3$  и  $D = 1$ . Потокът се задава с

$$-\nabla f(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - 3y^2)\mathbf{j}.$$

Нека визуализираме векторното поле заедно с линиите на ниво на  $f$ :



Можем да забележим, че градиентното поле е ортогонално на линиите на ниво. Това, разбира се, може да се очаква, тъй като, както показахме, градиентът сочи в посоката на най-бързо нарастване на функцията, а линиите на ниво свързват точки с еднакви стойности.

Освен това виждаме, че векторите са по-големи там, където линиите на ниво са по-близко една до друга, т.е. концентрацията се изменя по-бързо.

Сега ще дефинираме понятието граница и ще изведем линейзацията на дадено векторно поле.

### Дефиниция 12

Ако  $\forall \varepsilon > 0$  съществува  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такава, че  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$  от  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta$  следва, че  $\rho(\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{L}) < \varepsilon$ , наричаме  $L$  граница на  $\mathbf{f}$  при  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ .

За да получим линейзацията на дадено векторно поле  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  около точката  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , линейзираме всяка от компонентите поотделно, като вземем предвид, че можем да работим покомпонентно с векторни функции, когато пресмятаме граници, производни и т.н.:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) \end{bmatrix} + O(|2|) \\
&= \begin{bmatrix} f_1(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_n - \bar{x}_n \end{bmatrix} + O(|2|) \\
&= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + J(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + O(|2|),
\end{aligned}$$

където  $J$  е матрицата на Якоби за  $\mathbf{f}$  по отношение на  $\mathbf{x}$ .

### Твърдение 8

Линеаризацията на векторното поле  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  около точката  $\bar{\mathbf{x}}$  се задава с  $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + J(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ .

Линеаризацията играе важна роля при решаването или изследването на редица нелинейни задачи.

**Пример 25** (Метод на Нютон за решаване на нелинейни алгебрични системи.). Нека е дадена системата

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0.$$

Методът на Нютон е итерационен метод, при който започваме с начално приближение  $\mathbf{x}_0$  и намираме следващите по формулата

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - J^{-1}(\mathbf{x}_i)\mathbf{f}(\mathbf{x}_i).$$

Той се основава на решаването на линеаризираната около точката  $\mathbf{x}_i$  система:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + J(\mathbf{x}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) = 0.$$

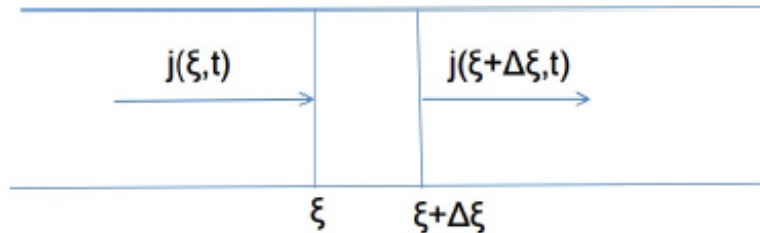
Основните диференциални операции върху дадено векторно поле  $\mathbf{F}$  са отново свързани с оператора  $\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ . Той може да действа по два начина върху  $\mathbf{F} = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n})$  (засега разглеждаме стандартни Декартови координати):

$$\nabla \cdot \mathbf{F}, \quad \nabla \times \mathbf{F}.$$

И двата имат важен физически смисъл и ще ги разгледаме последователно

### Дивергенция на векторно поле

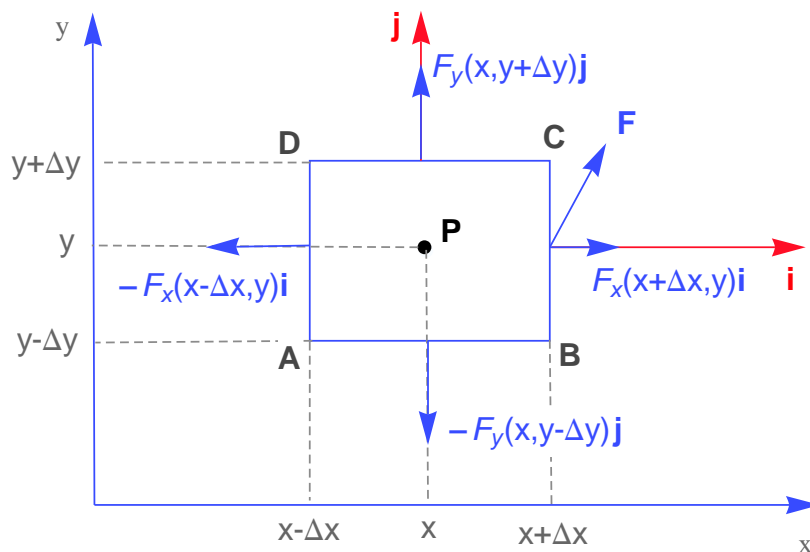
Много от математическите модели на физически процеси се основават на закони за запазване. Да си припомним как изглеждат нещата в 1D:



Изменението на величината  $u$ , определено от потока  $j$ , е вследствие на разликата между това, което “влиза” в точката, и това, което “излиза” от нея, т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}.$$

Нека видим как можем да обобщим тази идея в 2D (в 3D е аналогично). Тук ще заградим точката с правоъгълник със страни, които ще пуснем да клонят към 0:



Тъй като  $\Delta x$  и  $\Delta y$  ще бъдат пуснати да клонят към 0, можем да считаме, че върху всяка от страните на правоъгълника  $\mathbf{F}$  е “почти константа”. Тогава нетното изтичане през  $AD$  и  $BC$  за единица време е

$$[\mathbf{F}(x + \Delta x, y) - \mathbf{F}(x - \Delta x, y)]2\Delta y \cdot \mathbf{i} = [F_x(x + \Delta x, y) - F_x(x - \Delta x, y)]2\Delta y.$$

Нетното изтичане през  $AB$  и  $CD$  е

$$[\mathbf{F}(x, y + \Delta y) - \mathbf{F}(x, y - \Delta y)]2\Delta x \cdot \mathbf{j} = [F_y(x, y + \Delta y) - F_y(x, y - \Delta y)]2\Delta x.$$

Тогава средното изтичане през границите на правоъгълника на единица обем (в случая, площ) е

$$\frac{F_x(x + \Delta x, y) - F_x(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + \frac{F_y(x, y + \Delta y) - F_y(x, y - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}.$$

### Н.В. 13

Всички точкови характеристики на непрекъснатата среда се дефинират като граничен преход при обем, клонящ към 0. Впрочем не е необходимо да затворим точката в правоъгълник. Можем да я затворим в произволен обем, но при граничния преход няма значение. Ще се върнем на този въпрос по-късно.

И така, вече сме готови да дефинираме понятието дивергенция в координатен вид.

### Дефиниция 13

**Дивергенцията** на векторното поле  $\mathbf{F} = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n})$ , зададено с декартовите си координати, е

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} := \frac{\partial F_{x_1}}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_{x_n}}{\partial x_n}.$$

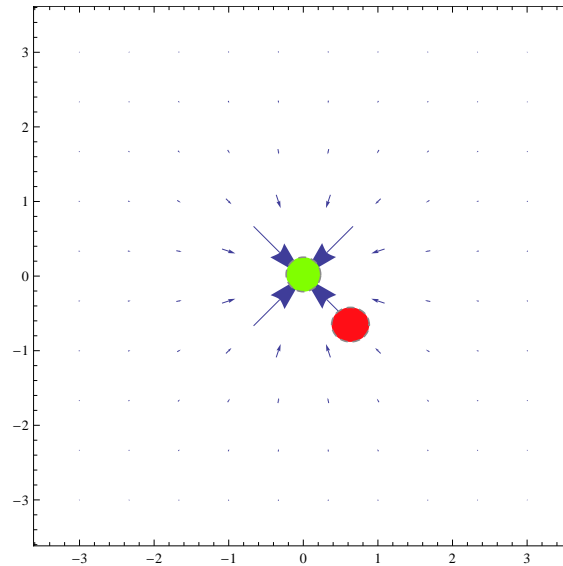
Последната дефиниция е еквивалентна на геометрически-инвариантна дефиниция, която съдържа в себе си и физическия смисъл на понятието. Засега ще я приведем само на интуитивно ниво и ще я уточним по-късно.

### Дефиниция 14

**Дивергенцията** на векторното поле  $\mathbf{F}$  (нека си мислим за него като за поток) е “средното изтичане от точката за единица време на единица обем”:

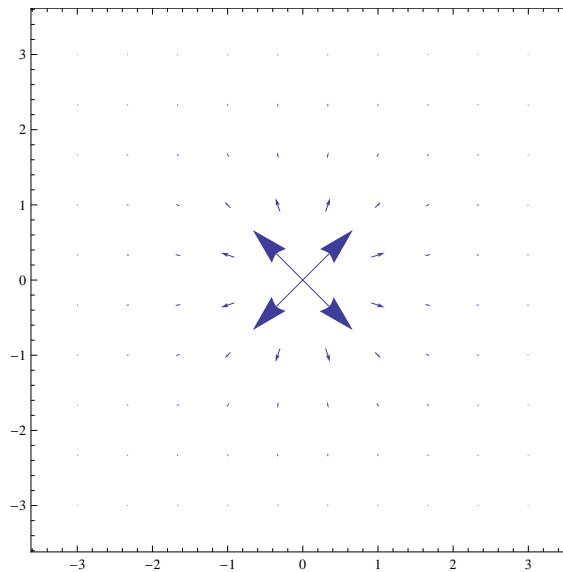
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\text{нетното изтичане от елементарния обем } \Delta V \text{ за единица време}}{\Delta V}.$$

**Пример 26.** Да разгледаме векторното поле, изобразено по-долу:



Дивергенцията в зелената точка е отрицателна, тъй като всичко “влиза” в точката. Дивергенцията в червената точка е положителна, тъй като от нея повече “излиза”, отколкото “влиза”.

**Пример 27.** Да разгледаме векторното поле, изобразено по-долу:



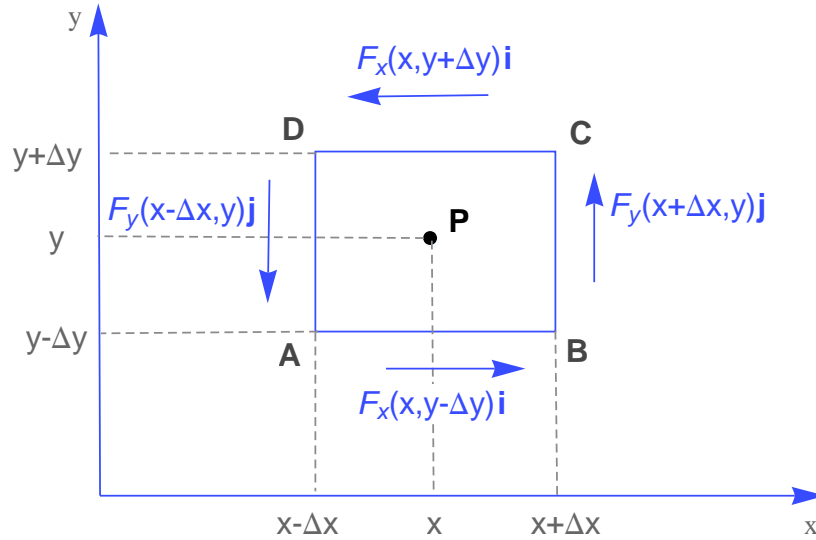
Дивергенцията в началото на координатната система е положителна, тъй като всичко “излиза” от точката.

### Ротация на векторно поле

Другата важна диференциална операция е ротацията на векторното поле,  $\text{curl } \mathbf{F}$ ,  $\nabla \times \mathbf{F}$  (използват се още термините ротор, вихър).

Много потоци имат тенденция да извършват въртеливи движения. Така например, ако поставим коркова тапа във флуид, който се характеризира с такъв поток, тя ще започне да се върти около някаква ос на въртене. За да опишем въртеливите движения, е необходимо да опишем оста на въртене, посоката (срещу часовниковата или по часовниковата стрелка) и големината, т.е. това е векторна величина.

Нека разгледаме въртенето около ос в направление  $\mathbf{k}$  в дадена точка. За тази цел ще разгледаме движението на частиците по границата на правоъгълна област, заграждаща точката, нека я означим с  $P$ . Засега ще разгледаме равнината, съдържаща  $P$  и ортогонална на  $\mathbf{k}$ , т.е. ще опишем съответната 2D ротация (2Dcurl). На фигурата по-долу е илюстриран “идеалният” случай за това как трябва да изглежда потокът, за да бъде ротацията положителна.



И така, сумарният поток по границата на областта е

$$[F_y(x + \Delta x, y) - F_y(x - \Delta x, y)] 2\Delta y + [F_x(x, y - \Delta y) - F_x(x, y + \Delta y)] 2\Delta x.$$

Тогава можем да определим средния поток “около” областта на единица площ като

$$\frac{F_y(x + \Delta x, y) - F_y(x - \Delta x, y)}{2\Delta x} + \frac{F_x(x, y - \Delta y) - F_x(x, y + \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} =: 2\text{Dcurl } \mathbf{F}.$$

Разглеждайки ротацията в 3D, това, което получихме, е всъщност  $\mathbf{k}$ -компонентата на ротацията. Аналогично можем да получим и останалите две. Така дефинираме ротацията по следния начин.

### Дефиниция 15

**Ротацията** на векторното поле  $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$  се дефинира чрез

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} := \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

### Допълнителни задачи

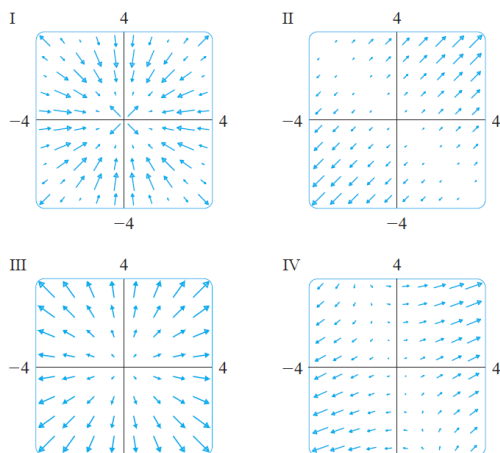


**Задача 1.** Да се изобрази векторното поле  $\mathbf{F}(x, y)$ , ако

- (а)  $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ ;
- (б)  $\mathbf{F}(x, y) = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

**Задача 2.** Свържете функциите  $f$  с графиките на техните градиентни векторни полета I-IV:

- (а)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;
- (б)  $f(x, y) = x(x + y)$ ;
- (в)  $f(x, y) = (x + y)^2$ ;
- (г)  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ ;

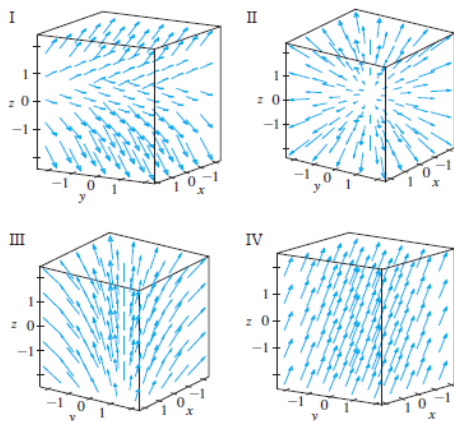


**Задача 3.** Да се линеаризира векторното поле  $\mathbf{F} = (x^3y - 2y, x^2y^2)$  в точката  $A(1, 1)$ .

**Задача 4.** Намерете  $\text{div}\mathbf{F}$  и  $\text{curl}\mathbf{F}$ :

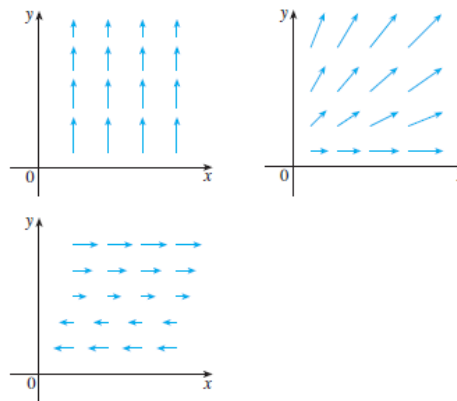
- $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2z^2\mathbf{i} + x^2yz^2\mathbf{j} + x^2y^2z\mathbf{k}$ ;
- $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \sin y, e^y \sin z, e^z \sin x)^T$ ;
- $\mathbf{F}(x, y, z) = \ln(2y + 3z)\mathbf{i} + \ln(x + 3z)\mathbf{j} + \ln(x + 2y)\mathbf{k}$ ;

**Задача 5.** Коя от следните картинки на кое векторно поле съответства:



- (а)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ;
- (б)  $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ;
- (в)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ ;
- (г)  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ?

**Задача 6.** Всяко от следните векторни полета  $\mathbf{F}$ , изобразени в равнината  $xy$  има същия вид във всяка успоредна равнина (т.е. не зависи от  $z$ ).



Определете:

- Какъв е знакът на  $\nabla \cdot \mathbf{F}$ ? Обосновете се.
- Накъде сочи  $\nabla \times \mathbf{F}$ ? Обосновете се.

**Задача 7.** Нека  $f$  е скаларно поле, а  $\mathbf{F}$  е векторно поле. Кой от следните изрази имат смисъл? За тези, които имат, посочете дали резултатът е вектор или скалар:

- (а)  $\nabla \times f$ ;
- (б)  $\nabla \times (\nabla f)$ ;
- (в)  $\text{grad}(\text{div } \mathbf{F})$ ;
- (г)  $\text{div}(\text{curl}(\text{grad } f))$ ;
- (д)  $(\nabla f) \times (\nabla \cdot \mathbf{F})$ .

**Задача 8.** Тънка метална пластина, намираща се в равнината  $Oxy$ , има температура  $T(x, y)$  в точката  $(x, y)$ . Линиите на ниво на  $T$  се наричат изотерми. Скицирайте няколко изотерми, ако функцията, моделираща температурата, е

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}.$$

Направете скица на дифузионния поток.

**Задача 9.** Покажете, че ако  $g(s, t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2)$  и  $f$  е диференцируема функция, тогава  $g$  удовлетворява уравнението

$$t \frac{\partial g}{\partial s} + s \frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

**Задача 10.** Ако скоростта на даден флуид е зададена с

$$\mathbf{v} = (ax + by)\mathbf{i} + (cx + dy)\mathbf{j},$$

намерете условия за  $a, b, c, d$ , така че

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = 0.$$

Проверете, че в този случай

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla(ax^2 + 2bxy - ay^2).$$

Какво може да кажете тогава за векторното поле  $\mathbf{v}$ .

**Задача 11.** Покажете, че всяко векторно поле от вида

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k},$$

където  $f, g, h$  са диференцируеми функции, е безвихрово, т.е.  $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Дайте физична интерпретация за това понятие.

**Задача 12.** Покажете, че всяко векторно поле от вида

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(y, z)\mathbf{i} + g(x, z)\mathbf{j} + h(x, y)\mathbf{k},$$

където  $f, g, h$  са диференцируеми функции, е несвиваемо, т.е.  $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ . Дайте физична интерпретация за това понятие.

**Задача 13.** Да се имплементира методът на Нютон за решаване на нелинейни системи. За целта напишете функция `Newton[f_, x0_, tol_]` в *Mathematica*, която решава системата  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$  с начално приближение  $x_0$  и точност  $tol$ .

**Задача 14.** Уравненията на Maxwell, които свързват електричното поле  $\mathbf{E}$  и магнитното поле  $\mathbf{H}$  и са фундаментални при изследването на процеси от класическия електромагнетизъм, при определени предположения са

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

където  $c$  е скоростта на светлината. Докажете следните равенства:

$$\bullet \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2};$$

$$\bullet \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2};$$

$$\bullet \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

## 1.5 Уравнения на топло- и масо-пренос. Уравнения от тип реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис

На база на казаното в предходния параграф е ясно, че можем да запишем следния общ вид на даден закон за запазване

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} + \mathbf{f},$$

където  $\mathbf{j}$  е потокът на запазваната величина, а  $\mathbf{f}$  е източник/поглъщател. Ние ще изведем строго това уравнение (**уравнението на непрекъснатостта**), след като се запознаем с основните теореми на интегралното смятане.

И така, в зависимост от това какво поражда потока, замествайки в уравнението на непрекъснатостта, получаваме основните класове диференциални уравнения, описващи топло- и масо-пренос. Ще ги разгледаме последователно.

### Уравнение на дифузията

Както стана въпрос по-рано, дифузионният поток се моделира от закона на Фик (закон на Фурие за топлопроводност):

$$j_{diff} = -D\nabla u. \quad (1.4)$$

## 1.5. Уравнения на топло- и масо-пренос. Уравнения от тип реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис

Тогава, замествайки в уравнението на непрекъснатостта, получаваме уравнението на дифузията:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D \nabla u) + f.$$

В частния случай, когато  $D$  е константа, получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + f.$$

Привеждайки в координатна форма в Декартови координати, получаваме:

- В 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f.$$

- В 1D при константен коефициент на дифузия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

- В 2D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f.$$

Впрочем последното се отнася, когато средата е изотропна (т.е. скоростта на дифузия е една и съща във всички направления). Възможно е  $D$  в (1.4) да е матрица (тензор на дифузия), като по този начин се моделират различни дифузионни коефициенти в различните направления. Например, ако  $D$  е диагонална матрица с диагонални елементи  $D_1$  и  $D_2$ , то получаваме уравнение на дифузията в анизотропна среда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f.$$

- В 2D при константен коефициент на дифузия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f.$$

### Уравнение на адвекцията

Другият основен процес, наред с дифузията, който обуславя движението на вещества, топлинна енергия и др., е адвекцията (в различен контекст този механизъм може да се нарича още конвекция или прост пренос). Смесът е, че веществото или топлинната енергия се намират във флуид, който се движи с някаква скорост, нека я означим с  $\mathbf{b}$ . Тогава той по естествен начин ще носи със себе си и даденото вещество/топлинна енергия и можем да опишем потока като

$$\mathbf{j}_{adv} = \mathbf{b}u.$$

Така получаваме уравнението на адвекцията (преноса):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{b}u) + f.$$

В случая, когато флуидът е несвиваем, т.е.  $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ , горното уравнение се опростява до

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{b} \cdot \nabla u + f.$$

Нека отново да дадем някои конкретни координатни представяния в Декартови координати:

- В 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (bu) + f.$$

- В 1D при константна скорост на адвекция:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b \frac{\partial u}{\partial x} + f.$$

- В 2D, ако означим скоростта на адвекция с  $\mathbf{b} = (b_x, b_y)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (b_x u) - \frac{\partial}{\partial y} (b_y u) + f.$$

- В 2D при несвиваем флуид (в частност, когато скоростта на адвекция е константа):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_x \frac{\partial u}{\partial x} - b_y \frac{\partial u}{\partial y} + f.$$

### Насочено движение по посоката на даден атрактант

Третият механизъм, който ще разгледаме като възможна причина за наличието на поток, е движението по посоката на даден атрактант. Пример за такова движение е, когато организмите се движат по посоката на хранителни ресурси, когато клетките на имунната система се движат по посоката на даден химичен сигнализатор, който сигнализира за наличието на чужди тела в организма и др. Нека с  $c$  означим концентрацията на дадения атрактант. Тогава нетният поток вследствие на насоченото движение би следвало да бъде в направлението на нарастване на концентрацията на  $c$ , т.е. ще се описва като

$$\mathbf{j}_{chem} = \lambda \nabla c u.$$

Така получаваме уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \lambda \nabla c u.$$

Тук, разбира се, аналогично на предходните примери, може моделът да се приведе в координатна форма в различните случаи. Това е напълно аналогично и ние няма да се спираме на този въпрос.

**“Комбинирани” уравнения**

Разбира се, при разглеждането на една реална ситуация, много често потокът е породен от повече от един процес. Нека разгледаме няколко примера, които да илюстрират този въпрос.

- Уравнение от тип дифузия-адвекция. Ако потокът е вследствие както на дифузия, така и на адвекция, ще получим уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D\nabla u + \mathbf{b}u) + f$$

или, при константен коефициент на дифузия и несвиваем флуид, пораждащ адвективния поток, ще получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u - \mathbf{b} \cdot \nabla u + f.$$

- Уравнение от тип реакция-дифузия Когато  $f$  зависи от  $u$ , често се нарича “реакционен член”. Той може да има смисъл например на дадена химична, биологична реакция и др. Например, ако разгледаме популацията на организми, които се движат по случаен начин (т.е. тяхното движение може да се опише чрез дифузионен член, нека приемем, че коефициентът на дифузия е константен) и имат логистичен растеж, можем да запишем следното уравнение за числеността (плътността) на популацията  $u(x, t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right).$$

- Уравнение от тип реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис Ще дадем и един пример, който включва в себе си всички членове, които разгледахме в настоящата секция – дифузия, адвекция, насочено движение по посока на атрактант (което в контекста на химични сигнализатори би могло да носи наименованието “хемотаксис”), реакционен член. Нека си мислим, че имаме популация от клетки, които имат естествен растеж, който се описва с логистичен член, имат случайно движение, биват носени от флуид (например кръвоносния поток) и се придвижват по посоката на даден хемоатрактант. Тогава уравнението, което би описвало концентрацията на клетки в дадена точка от пространството и даден момент от време, ще бъде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D\nabla u + \mathbf{b}u + \lambda\nabla cu) + ru \left(1 - \frac{u}{K}\right). \quad (1.5)$$

**Системи уравнения**

Много често моделите, които се срещат в практиката, се състоят не от едно, а от няколко уравнения, т.е. представляват системи от ЧДУ. Така например, ако разгледаме уравнение (1.5), концентрацията на хемоатрактанта  $c$  е естествено да се определя от решението на друго уравнение. Нещо повече, тъй като клетките могат да консумират дадения хемоатрактант, то неговата концентрация ще е пряко свързана с концентрацията на клетките  $u$ , т.е.  $u$  ще зависи от

$c$ , но  $c$  също ще зависи от  $u$  и следователно ще трябва да решаваме система от уравнения. Потокът на флуида  $\mathbf{b}$  също често няма да бъде известен като някаква аналитично зададена функция, а ще се определя от модел от флуидната динамика, често някаква форма на уравненията на Navier–Stokes и т.н. Разбира се, ние няма как да обхванем всички възможни комбинации на различни уравнения в една система. Целта ни по-скоро е да дадем идея, че много често разглежданите уравнения ще бъдат комбинирани в такава. В рамките на магистърската програма, в различен контекст, ще имате възможност да се запознаете с различни примери на модели, които се описват посредством системи от ЧДУ.

Също да отбележим, че сложността в численото решаване на дадена диференциална задача, освен от факта, че тя често ще представлява не едно уравнение, а система, се определя и от нелинейността в коефициентите. Често  $D$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $f$  могат да бъдат нелинейни функции (или, както казахме, решения на други диференциални задачи) и това може значително да усложни численото решаване на така получените диференциални задачи. За численото решаване на нелинейни задачи става въпрос в курсовете "Теория на диференчните схеми" "Метод на крайните елементи - 2" "Математически модели и изчислителен експеримент".

### Стационарни и нестационарни задачи

На всяка от разглежданите нестационарни задачи можем да съпоставим и съответна стационарна, която описва стационарното състояние на разглеждания процес. Това означава, че процесът не зависи от времето, т.е. трябва да заместим  $\frac{\partial u}{\partial t}$  с 0. Така получаваме например стационарното уравнение на дифузията (топлопроводността)

$$\nabla \cdot (D\nabla u) + f = 0$$

или, което е същото,

$$-\nabla \cdot (D\nabla u) = f.$$

Стационарното уравнение от тип реакция-адвекция-дифузия при несвиваем флуид, причиняващ адвекцията, има вида

$$\nabla \cdot (-D\nabla u + \mathbf{b}u) = f$$

и т.н.

### Гранични условия

Както знаем, за да затворим една диференциална задача, трябва да поставим и подходящи гранични условия, а за нестационарните задачи – и начални. Граничните условия, които обикновено поставяме за задачите от разглежданите области, можем да класифицираме по следния начин:

- Гранични условия на Дирихле (гранични условия от първи род) – това са условия за стойността на функцията по границата, т.е. условия от вида

$$u(\mathbf{x}, t) = \mu(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

за някоя дадена функция  $\mu$ .

- Гранични условия на Нойман (гранични условия от втори род) – това са условия за нормалната производна върху границата. Те описват поток през границата. По-точно, ако разгледаме уравнението на дифузията, както обяснихме по-рано, дифузионният поток в нормално направление (т.е. който напуска границата) е

$$-D\nabla u \cdot \mathbf{n} = -D \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}},$$

Тогава условие за дифузионния поток през границата би имало вида

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mu.$$

- Гранични условия на Робин (гранични условия от трети род, смесени гранични условия) – това са условия, които включват линейна комбинация на функцията и нейната производна. Ако разгледаме уравнение с по-сложен поток, например адвекция-дифузия, тогава нормалната компонента на потока би имала вида

$$(-D\nabla u + \mathbf{b}u) \cdot \mathbf{n} = -D \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta u,$$

където  $\beta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}$  е нормалната компонента на скоростта на флуида, който поражда адвективния поток. Т.е. граничното условие ще има вида

$$-D \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta u = \mu.$$

Впрочем смесено гранично условие може да се получи и когато имаме само дифузионен поток, но той е пропорционален например на  $(u - \mu)$ , т.е. потокът е вследствие на топлообмен с околната среда.

---

## Допълнителни задачи

**Задача 1.** Дадено вещество се разпространява в канал с правоъгълна форма и размери  $10m \times 5m$ . В левия край се влива вещество, чийто поток е  $0.1 \text{ mgs}^{-1}m^{-1}$ . Флуидът в канала се движи с константна скорост  $1m/s$  надясно. Всички останали граници са непроницаеми за веществото. Формулирайте математически модел на процеса.

**Задача 2.** Разглеждаме микробиална популация в реактор с формата на паралелепипед. Приемаме, че микроорганизмите имат логистичен растеж и не могат да напускат реактора. Флуидът в реактора се движи със скорост  $\mathbf{u}$ . Да се формулира математически модел в операторен вид. Да се приведе в Декартови координати.

---

## 1.6 Операторът $\nabla$ в недекартови координатни системи

Основното предимство на формулирането на математическите модели в операторна форма е, че така те са независими от конкретната геометрия и от избора на координатна система. За да можем да се възползваме от това предимство

обаче, е необходимо да можем да представим участващите оператори в координатна форма. Ще илюстрираме идеята, като намерим координатно представяне на оператора  $\nabla$  в полярни координати

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Основна разлика на работата в полярни координати в сравнение с работата в декартова координатна система е, че базисните вектори (които сочат в посоката накъдето растат независимите променливи) са различни във всяка точка. **С други думи, при работата в полярни координати (или изобщо криволинейни координати) дефинираме локален базис.** В случая той има вида (проверете!)

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix}.$$

Вземайки предвид, че матрицата на трансформацията е ротационна матрица, можем лесно да напишем и обратната трансформация:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{bmatrix}.$$

И така, вече сме готови да представим оператора  $\nabla$  в полярни координати. Получаваме последователно

$$\begin{aligned} \nabla &= \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} \\ &= (\cos \varphi \hat{\mathbf{r}} - \sin \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \left( \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + (\sin \varphi \hat{\mathbf{r}} + \cos \varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \left( \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Нека видим сега как, използвайки последния резултат, можем да пресметнем дивергенцията на векторното поле

$$\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Имаме

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \nabla \cdot \mathbf{F} = \left( \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \cdot (F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (F_r \hat{\mathbf{r}}) + \hat{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_r \hat{\mathbf{r}}) + \hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Да обърнем внимание, че в последното е взет предвид фактът, че  $\hat{\mathbf{r}}$  и  $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$  зависят от  $\varphi$ .

За оператора на Лаплас получаваме

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla \cdot (\nabla f) = \nabla \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$



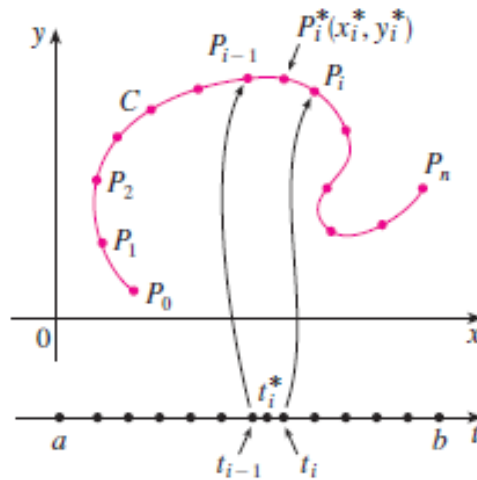
Координатното представяне на оператора  $\nabla$  в стандартни координатни системи (напр. цилиндрични, сферични и др.) може да бъде намерено лесно в справочници и интернет. Важно е обаче да знаем какъв е принципът за извеждането на тези координатни представяния, тъй като се налага работата и в координатни системи, които не са стандартни, а са специфични за дадена конкретна задача (това се налага често например при описването на еластични тела).

## 1.7 Криволинейни интеграли

Криволинейните интеграли са обобщение на класическия Риманов интеграл. Нека е дадена крива  $C$ , върху която е определена функцията  $f(\mathbf{x})$ . Обикновено кривата  $C$  се дефинира аналитично чрез векторната функция  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ,  $a \leq t \leq b$ . Ако разделим параметричния интервал  $[a, b]$ , въвеждайки точките  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то кривата също се разделя на дъги от съответните точки  $P_i = \mathbf{r}(t_i)$ . Избирайки точките  $P_i^* = (x_i^*, y_i^*)$  от всяка дъга с дължина  $\Delta s_i$ , дефинираме

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i,$$

ако последната граница съществува.



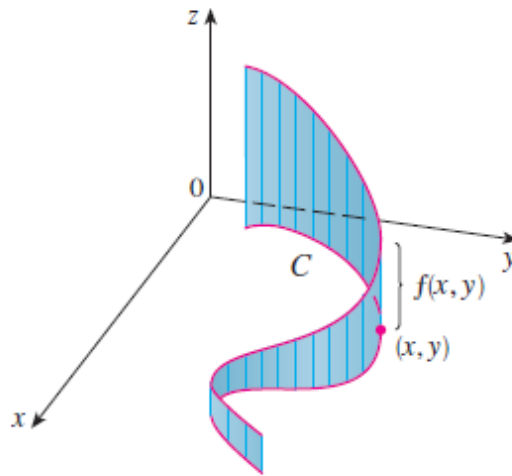
**Пример 28.** Нека плътността на тънка тел, чиято геометрия е описана от кривата  $C$ , е означена с  $\rho$ . Тогава можем да намерим масата на телта върху инфинитезимална част от нея с дължина  $ds$  чрез произведението  $\rho ds$ . Сумирайки върху цялата тел, получаваме нейната маса, т.е.

$$\int_C \rho ds.$$

**Пример 29.** Дължината на дадена крива  $C$  може да бъде намерена чрез сумирането на инфинитезималните дъги  $ds$ , т.е.

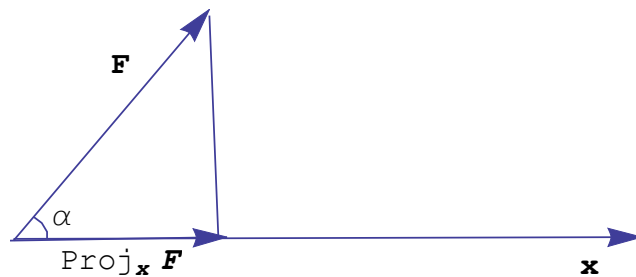
$$\int_C ds.$$

**Пример 30.** Криволинейният интеграл може да се интерпретира геометрично и по подобен начин на класическия Риманов интеграл. Да разгледаме следната фигура:



Едната страна на повърхнината, заключена под графиката на функцията  $f(x, y)$ , е точно  $\int_C f(x, y) ds$ .

**Пример 31.** Работата, извършвана от константна сила, действаща върху движещо се тяло, е силата по изминатия път. По-точно, ако силата не е в същата посока като движението на тялото, трябва да вземем само компонентата на силата в съответното направление, тъй като останалите компоненти нямат пряко отношение към движението. Следователно, ако силата  $\mathbf{F}$  действа върху тяло, движещо се между точките  $A$  и  $B$ , както е изобразено на фигурата:

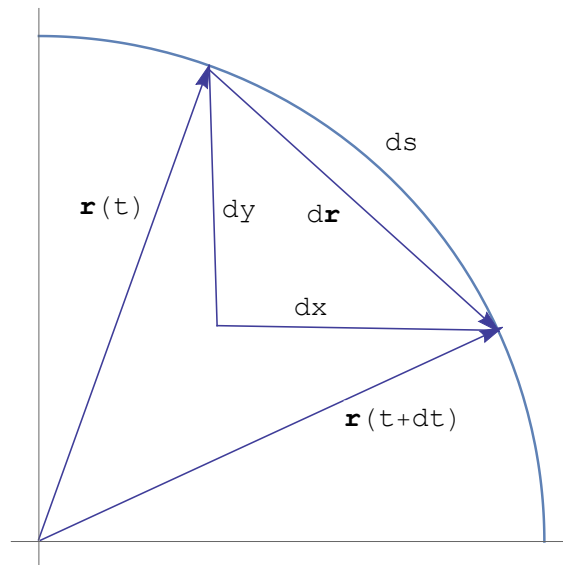


то работата е равна на  $\|Proj_x \mathbf{F}\| \|\mathbf{x}\|$ , където  $\mathbf{x} = \overrightarrow{AB}$  е векторът на отместването, а  $Proj_x \mathbf{F}$  е векторната проекция на  $\mathbf{F}$  върху  $\mathbf{x}$ . Вземайки предвид, че  $\|Proj_x \mathbf{F}\| = \|\mathbf{F}\| \cos \alpha$ , тогава можем да изразим работата  $W$  чрез  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{x}$ .

Нека сега разгледаме частица, движеща се в силово поле, определено от векторната функция  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  и нека траекторията на частицата е определена от  $\mathbf{r}(t)$ . Тогава във всяка точка трябва да умножим  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , за да получим работата върху инфинитезимална част от траекторията, и да сумираме върху цялата траектория  $C$  (направете фигура, която илюстрира казаното):

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Да разгледаме следната фигура:



От нея лесно се вижда следната зависимост (като вземем предвид, че за инфинитезимална дъга е в сила  $|d\mathbf{r}| = ds$ ):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt^2.$$

Така можем да запишем следната полезна формула.

#### Твърдение 9

Нека кривата  $C$  е дефинирана посредством векторната функция  $(x(t), y(t))$ , където  $t \in [a, b]$ . Тогава е в сила равенството

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2} dt$$

## 1.8 Основни теореми на интегралното смятане

### 1.8.1 Основна теорема за криволинейни интеграли

Теоремата на Нютон–Лайбниц (която е частен случай на основната теорема за криволинейни интеграли) гласи, че

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

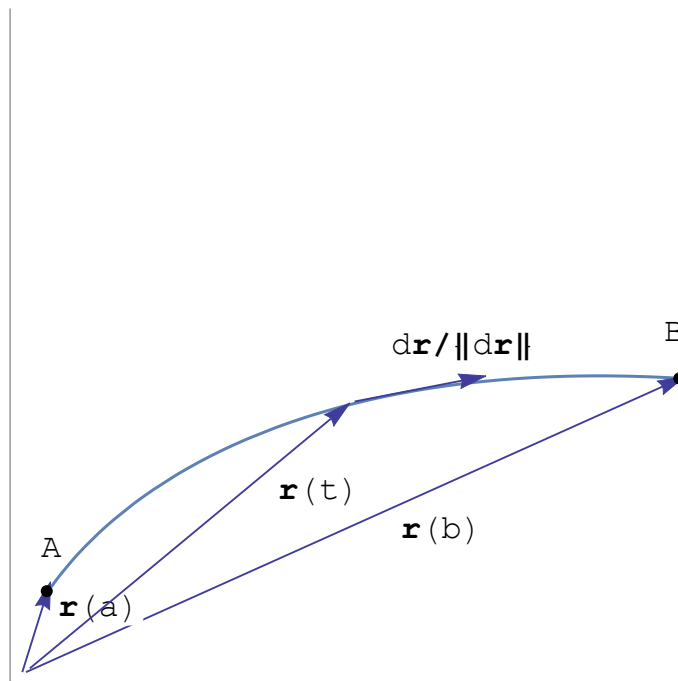
Последното може да бъде проверено лесно. Наистина, започвайки от  $f(a)$ , трябва да добавим всички инфинитезимални изменения  $df$ , за да получим  $f(b)$ :

$$f(a) + \int_a^b df = f(b).$$

Тъй като обикновено имаме определена функцията  $f(x)$ , е по-удобно да запишем интеграла във вида

$$\int_a^b df = \int_a^b \frac{df}{dx} dx.$$

Подобен резултат можем да получим в общия случай за криволинейни интеграли. Нека разгледаме кривата, определена от векторната функция  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Нека функцията  $f$  е дефинирана и достатъчно гладка върху кривата.



Разсъждавайки аналогично на теоремата на Нютон–Лайбниц, получаваме

$$f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = \int_C \left( \begin{array}{l} \text{скоростта на изменение по направление} \\ \text{на кривата в дадената точка} \end{array} \right) ds.$$

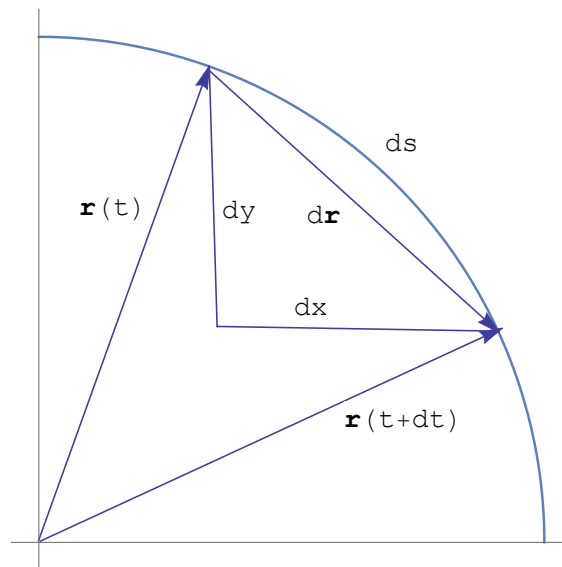
За да пресметнем производната по направление на кривата в дадена точка, трябва да пресметнем единичен вектор, сочещ по направление на кривата. Можем да изберем

$$\frac{d\mathbf{r}/dt}{\|d\mathbf{r}/dt\|}$$

или, което е същото  $d\mathbf{r}/\|d\mathbf{r}\|$ . Тогава

$$f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) = \int_C \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{\|d\mathbf{r}\|} ds.$$

Вземайки предвид, че  $\|d\mathbf{r}\|$  е равно на  $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$  (виж фигурата по-долу),



получаваме следната по-компактна форма.

**Твърдение 10: Основна теорема за криволинейни интегрални**

Нека  $C$  е гладка крива, зададена чрез векторната функция  $\mathbf{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Нека  $f$  е функция, която е определена и непрекъснато-диференцируема върху  $C$ . Тогава

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)).$$

**Пример 32.** Да пресметнем работата, извършена от гравитационното поле

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x}$$

при движението на частица с маса  $m$  от точката  $(3,4,12)$  до точката  $(2,2,0)$  по дадена по части гладка крива  $C$ .

Покажем, че работата може да бъде определена чрез

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Тогава, ако можем да намерим скаларната функция  $f(x, y, z)$  така, че  $\nabla f = \mathbf{F}$ , можем да използваме Основната теорема за криволинейни интегрални. Избираме функцията

$$f(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

(проверете, че тя удовлетворява условието). Тогава работата е равна на  $f(2, 2, 0) - f(3, 4, 12) = mMG(1/(2\sqrt{2}) - 1/13)$ .

---

**Допълнителни задачи**

**Задача 1.** Токът се дефинира като преминалия през проводника заряд  $Q$  за единица време. Като имате предвид това, дайте математическа дефиниция за  $I(t)$ . Дайте физична интерпретация на

$$\int_5^{10} I(t) dt.$$

**Задача 2.** Ако  $x$  се измерва в метри, а  $f(x)$  – в Нютони, то в какво се измерва

$$\int_0^{100} f(x) dx?$$

Обосновете се.

**Задача 3.** Ако  $x$  се измерва в метри, а  $a(x)$  – в килограми на метър, в какво се измерва  $da/dx$ ? А

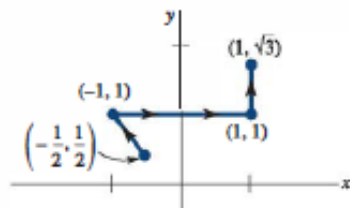
$$\int_2^8 a(x) dx?$$

Обосновете се.

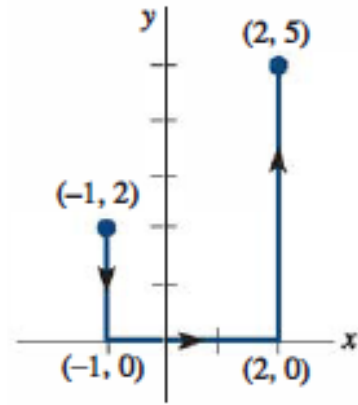
**Задача 4.** Пресметнете криволинейния интеграл, където  $C$  е зададената крива:

- $\int_C y^3 ds$ ,  $C : x = t^3, y = t, 0 \leq t \leq 2$ ;
- $\int_C xy ds$ ,  $C : x = t^2, y = 2t, 0 \leq t \leq 1$ ;
- $\int_C x \sin y ds$ ,  $C$  е отсечка с краища  $(0, 3)$  и  $(4, 6)$ ;
- $\int_C (x^2 y^3 - \sqrt{x}) ds$ ,  $C$  е дъгата от кривата  $y = \sqrt{x}$  от  $(1, 1)$  до  $(4, 2)$ ;
- $\int_C x e^{yz} ds$ ,  $C$  е отсечката, която свързва  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 2, 3)$ .

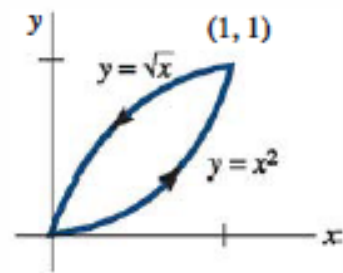
**Задача 5.** Намерете работата, извършена от силото поле  $\mathbf{F} = \frac{2}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{1}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$  при движение от точката  $(-1/2, 1/2)$  до точката  $(1, \sqrt{3})$  по траекторията, изобразена по-долу:



**Задача 6.** Пресметнете  $\int_C (2x + y) dx + xy dy$  върху кривата  $C$ :



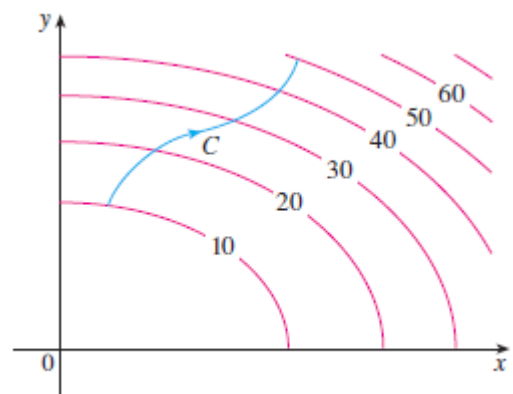
**Задача 7.** Пресметнете  $\oint_C (x^2 + y^2) dx - 2xy dy$  върху следната затворена крива:



**Задача 8.** Пресметнете  $\oint_C (x^2 - y^2) ds$ , където  $C$  се задава с

$$x = 5 \cos t, y = 5 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

**Задача 9.** На фигурата е показана крива  $C$  и линиите на ниво на функцията  $f$ , чийто градиент е непрекъснат. Намерете  $\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r}$ .



**Задача 10.** Покажете, че ако векторното поле  $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$  е консервативно и  $P, Q, R$  имат непрекъснати частни производни, тогава

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

**Задача 11.** Пресметнете криволинейния интеграл  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , където кривата  $C$  се определя от векторната функция  $\mathbf{r}(t)$ :

- $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}(t) = 11t^4\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ ;
- $\mathbf{F}(x, y) = (1 + xy)e^{xy}\mathbf{i} + x^2e^{xy}\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

**Задача 12.** Покажете, че интегралът не зависи от конкретния избор на кривата  $C$ :

$$\int_C 2xe^{-y} dx + (2y - x^2e^{-y}) dy,$$

където  $C$  е коя да е крива, свързваща точките  $(1, 0)$  и  $(2, 1)$ .

**Задача 13.** Частица започва движението си от точката  $(-2, 0)$  и се движи по оста  $x$  до точката  $(2, 0)$ , след което се движи по полуокръжността  $y = \sqrt{4 - x^2}$  до началната точка. Намерете работата, която извършва при това движение силовото поле

$$\mathbf{F}(x, y) = (x, x^3 + 3xy^2).$$

**Задача 14.** Нека  $\mathbf{F} = \nabla f$ , където  $f(x, y) = \sin(x - 2y)$ . Намерете криви  $C_1$  и  $C_2$  такива, че

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 1.$$

## 1.8.2 Теорема на Green

### Твърдение 11: Теорема на Green

Нека  $\partial\Omega$  е положително ориентирана, по части гладка, проста затворена крива в равнината и нека  $\Omega$  е областта, заградена от нея. Ако  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  са функции, дефинирани и непрекъснато диференцируеми в отворена област, съдържаща  $\Omega$ . тогава

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (P dx + Q dy).$$

*Доказателство.* Ще приведем доказателство не в най-общия случай, но случай, който е достатъчно общ за всички практически цели.

Първо, нека  $\Omega$  е проста област в следния смисъл:

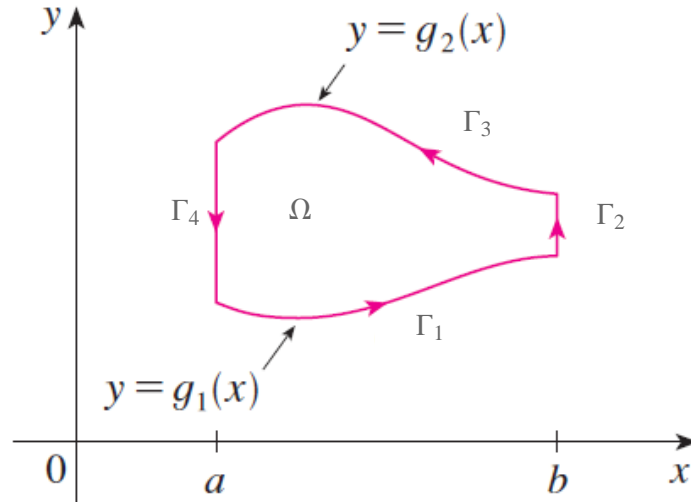
- $\Omega$  може да се представи във вида

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}; \quad (1.6)$$

- $\Omega$  може да се представи и във вида

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}. \quad (1.7)$$

Пример за такава област е илюстриран по-долу, където областта е представена във вида (1.6).



Вземайки предвид (1.6), получаваме (вж. последната фигура)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx &= \int_{\Gamma_1} P(x, y)dx + \int_{\Gamma_2} P(x, y)dx + \int_{\Gamma_3} P(x, y)dx + \int_{\Gamma_4} P(x, y)dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx. \end{aligned}$$

От друга страна,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega &= \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))] dx. \end{aligned}$$

Следователно

$$\oint_{\partial\Omega} P(x, y)dx = - \iint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} d\Omega.$$

Аналогично, като се използва (1.7), се проверява, че

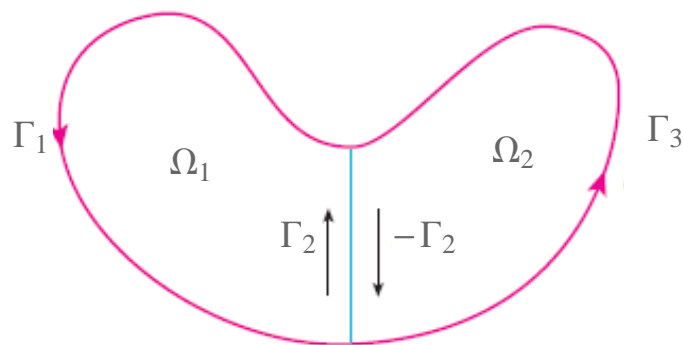
$$\oint_{\partial\Omega} Q(x, y)dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} d\Omega.$$

Следователно Теоремата на Green е в сила за области, които могат да се представят едновременно във вида (1.6) и във вида (1.7).

Оказва се обаче, че теоремата може лесно да се обобщи и за обединение на такива области, като се вземе предвид, че криволинейните интеграли върху общите им граници два по два се съкращават. Ще покажем как това се прави за обединението на две области, а за повече става аналогично.

Нека разгледаме областта  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , където  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  са прости области:





Тогава, прилагайки Теоремата на Green за всяка от простите области, получаваме

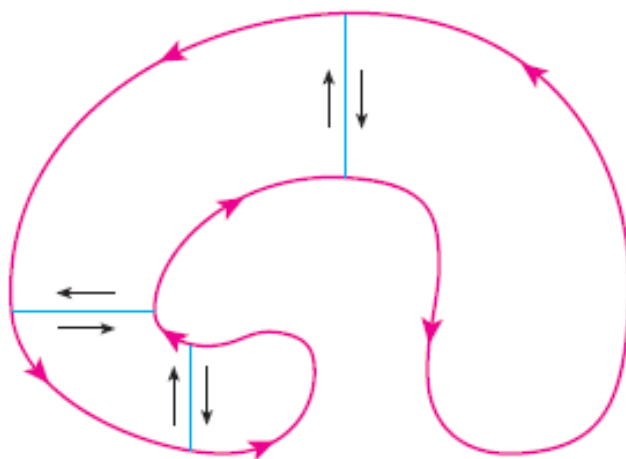
$$\iint_{\Omega_1} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} (Pdx + Qdy),$$

$$\iint_{\Omega_2} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\Gamma_3 \cup -\Gamma_2} (Pdx + Qdy).$$

Събирайки почленно последните уравнения, получаваме

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} (Pdx + Qdy).$$

Обобщението за обединение на краен брой прости области е напълно аналогично и е илюстрирано само графично по-долу:



Теоремата може да се обобщи и до вида, в който я формулирахме, но пропускаме това доказателство, тъй като повечето случаи, възникващи на практика, се покриват от това, което вече разгледахме.  $\square$

## 1.8.3 Векторни форми на теоремата на Green

**Твърдение 12: 2D Теорема за дивергенцията**

При предположенията на Теоремата на Green е в сила

$$\oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\Omega.$$

*Доказателство.* Нека функцията  $\mathbf{F}$  е определена чрез  $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\hat{\mathbf{i}} + Q(x, y)\hat{\mathbf{j}}$  и нека  $\partial\Omega$  се определя чрез векторната функция  $\mathbf{r}(t)$ . Вземайки предвид, че единичната външна нормала може да се пресметне чрез  $(dy/\|\mathbf{dr}\|, -dx/\|\mathbf{dr}\|)$  (проверете), получаваме последователно

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \oint_{\partial\Omega} \left( P(x, y) \frac{dy}{\|\mathbf{dr}\|} - Q(x, y) \frac{dx}{\|\mathbf{dr}\|} \right) ds \\ &= \oint_{\partial\Omega} (P dy - Q dx) \\ &= \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} d\Omega. \end{aligned}$$

□

Непосредствено се проверява и че следното представяне на Теоремата на Green във векторен вид е в сила:

**Твърдение 13: 2D Теорема на Stokes**

При предположенията на Теоремата на Green е в сила

$$\iint_{\Omega} (2D \operatorname{curl} \mathbf{F}) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

или, което е същото,

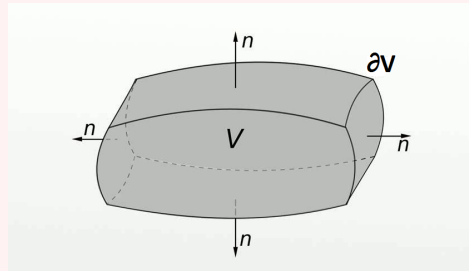
$$\iint_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

## N.B. 14

Теоремата за дивергенцията и теоремата на Stokes могат да се докажат и в 3D:

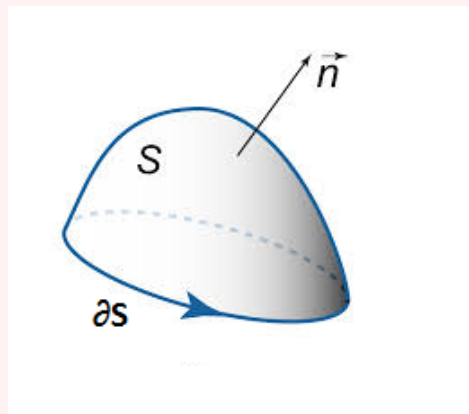
- Теорема за дивергенцията (Теорема на Гаус–Остроградски):

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) dV = \oiint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS.$$



- Теорема на Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$



За повече подробности, вж. напр. “J. Stewart, Calculus”.

## Допълнителни задачи

**Задача 1.** Като използвате теоремата на Green за дадената положително-ориентирана крива, пресметнете

- $\int_C xy^2 dx + 2x^2 y dy$ , където  $C$  е триъгълникът с върхове  $(0,0)$ ,  $(2,2)$ ,  $(2,4)$ ;
- $\int_C \cos y dx + x^2 \sin y dy$ , където  $C$  е правоъгълник с върхове  $(0,0)$ ,  $(5,0)$ ,  $(5,2)$ ,  $(0,2)$ ;
- $\int_C y^3 dx - x^3 dy$ , където  $C$  е окръжност-

та с уравнение  $x^2 + y^2 = 4$ ;

- $\int_C (y + e^{\sqrt{x}}) dx + (2x + \cos y^2) dy$ , където  $C$  е границата на областта, заключена от параболите  $y = x^2$  и  $x = y^2$ .

**Задача 2.** Като използвате теоремата на Green, пресметнете  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  (проверете как е ориентирана кривата, преди да приложите теоремата):

- $\mathbf{F}(x, y) = \langle y \cos x - xy \sin x, xy + x \cos x \rangle$ ,

където  $C$  е триъгъникът от  $(0,0)$  през  $(0,4)$  през  $(2,0)$  до  $(0,0)$ ;

- $\mathbf{F}(x, y) = \langle \sqrt{x^2 + 1} \rangle$ , където  $C$  е триъгъникът от  $(0,0)$  през  $(1,1)$  през  $(0,1)$  до  $(0,0)$ ;
- $\mathbf{F}(x, y) = \langle y - \cos y, x \sin y \rangle$ , където  $C$  е окръжността (по посока на часовниковата стрелка)  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 1$ .

**Задача 3.** Като използвате теоремата на Грен, докажете формулата за смяна на променливите под интеграла за частния случай, когато  $f(x, y) = 1$ :

$$\iint_R dx dy = \iint_S \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

В последното,  $R$  е област в равнината  $xy$ , която отговаря на област  $S$  в равнината  $uv$  – образ под действието на трансформацията

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v).$$

**Задача 4.** Нека  $\Omega$  и  $\partial\Omega$  удовлетворяват условията на теоремата за дивергенцията, а скаларните функции и компонентите на векторните полета са поне два пъти непрекъснато диференцируеми. Докажете следните тъждества:

- $\iint_{\partial\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{ndS} = 0$ , където  $\mathbf{a}$  е константен вектор;
- $V(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ndS}$ , където  $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ;
- $\iint_{\partial\Omega} \text{curl } \mathbf{F} \cdot \mathbf{ndS} = 0$ ;
- $\iint_{\partial\Omega} (f\nabla g) \cdot \mathbf{ndS} = \iiint_{\Omega} (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) dV$ ;
- $\iint_{\partial\Omega} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{ndS} = \iiint_{\Omega} (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) dV$ ;

#### 1.8.4 Извеждане на уравнението на непрекъснатостта. Координатно инвариантна дефиниция за дивергенция.

Ще изведем общия вид на един закон за запазване в 2D (всъщност, тъй като извеждането се основава на Теоремата за дивергенцията, то е валидно и в 3D). Изменението на нетното количество  $U$  в дадена област  $\Omega$  може да се дължи или на нещо, което е минало през границата на областта, или на нещо, което се генерира/поглъща в нея. Тогава

$$\frac{dU}{dt} = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{nds} + F,$$

където  $\mathbf{j}$  е потокът, а  $F$  е нетното производство/поглъщане в областта за единица време. Последното е **интегралната форма на закона за запазване**. За да сведем закона до диференциална форма, първо, делим двете страни на  $|\Omega|$  и получаваме

$$\frac{d(U/|\Omega|)}{dt} = - \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{nds} + \frac{F}{|\Omega|}. \quad (1.8)$$

Сега използваме Теоремата за дивергенцията и получаваме

$$\frac{d(U/|\Omega|)}{dt} = - \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{j} d\Omega + \frac{F}{|\Omega|}.$$

Използвайки Теоремата за средните стойности и пускайки  $|\Omega| \rightarrow 0$ , получаваме окончателно **Уравнението на непрекъснатостта**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} + f. \quad (1.9)$$

**N.B. 15**

Всички точкови характеристики на дадена непрекъсната среда се получават посредством граничен преход. В последното уравнение използваните означения имат следния смисъл: дефинираме

$$u := \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{U}{|\Omega|}, \quad f := \lim_{|\Omega| \rightarrow 0} \frac{F}{|\Omega|}.$$

Начинът, по който изведохме уравнението на непрекъснатостта, ни дава основание да формализираме координатно-инвариантната Дефиниция 1.4 за дивергенция по следния начин (сравнете (1.8) и (1.9)):

**Дефиниция 16**

**Дивергенцията** на векторното поле  $\mathbf{F}$  в точката  $P$  е:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{\Omega \rightarrow \{P\}} \frac{1}{|\Omega|} \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds.$$



## Глава 2

# Линейни алгебрични системи, линейни пространства, линейни трансформации

### 2.1 Геометрия на линейните алгебрични системи

Често е полезно да имаме геометрична интерпретация на даден аналитичен обект. Ще разгледаме две геометрични представяния на дадена линейна система. Първо, ще коментираме “row picture” за линейна система

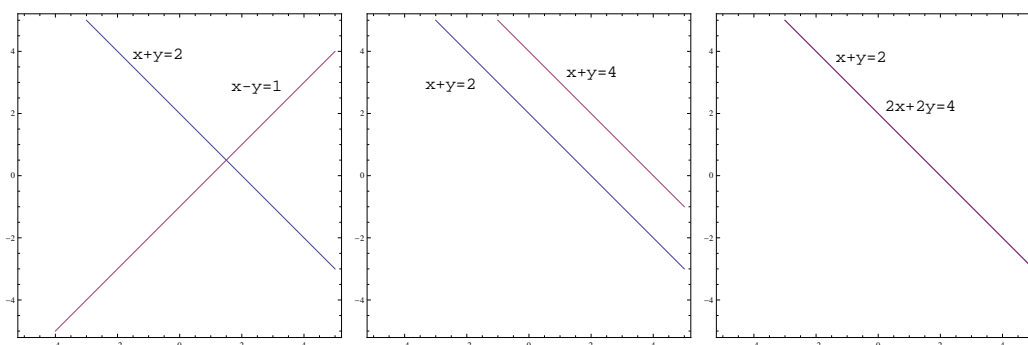
В 2D можем да визуализираме всяко от уравненията на линейната система (т.е. всеки ред на системата), като изобразим всички точки, чиито координати удовлетворяват уравненията в декартова координатна система. Както знаем, те отговарят на прави в равнината.

**Пример 33.** Съществуват точно три възможни взаимни положения на две прави в равнината. Да разгледаме следните примери:

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\ x - y &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\ x + y &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y &= 2 \\ 2x + 2y &= 4\end{aligned}$$



В първия случай двете прави се пресичат в точка. Координатите ѝ съответстват на единственото решение на системата.

На втората фигура правите са успоредни и следователно системата няма решение.

В третия случай двете прави съвпадат, т.е. системата има безброй много решения (по-точно права от решения).

Преминавайки към 3D, row picture за всяко уравнение е равнина в тримерното пространство.

“Хубавият” случай е, когато системата има единствено решение. Това се получава, когато първите две равнини се пресичат в права, която пресича третата равнина в точка.

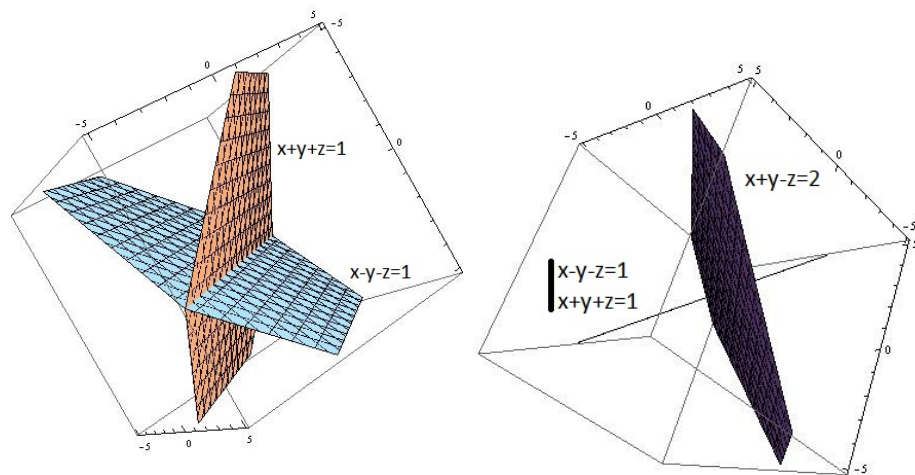
**Пример 34.** Разглеждаме системата

$$x + y + z = 1$$

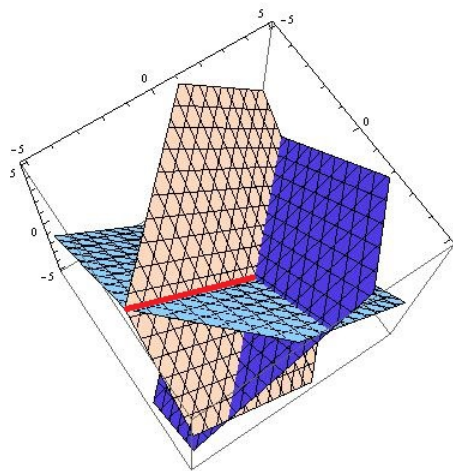
$$x - y - z = 1$$

$$x + y - z = 2$$

На лявата фигура по-долу са изобразени първите две равнини, които се пресичат в права. На дясната фигура е показана тази права, която пресича третата равнина в точка.



Пълният row picture, състоящ се от трите равнини е илюстриран по-долу. Пресечницата на първите две равнини е означена в червено.



**Задача.** Опишете всички възможности за това как три равнини са разположени в пространството.



Както виждаме, row picture е относително трудно да се визуализира в 3D, но отново дава ценна информация за геометрията на линейните системи. В повече измерения обаче тази илюстрация не може да помогне.

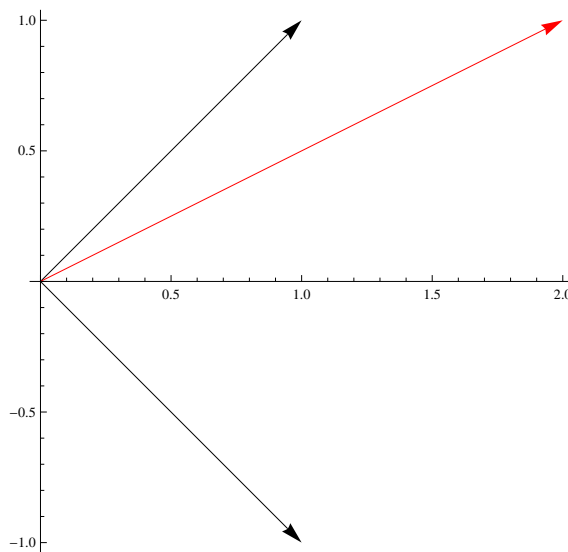
Оказва се, че в много случаи column picture създава по-добра интуиция. Нека първо разгледаме отново системите от Пример 33.

**Пример 35.** Работейки стълб по стълб, можем да запишем трите системи от Пример 33, както следва:

•

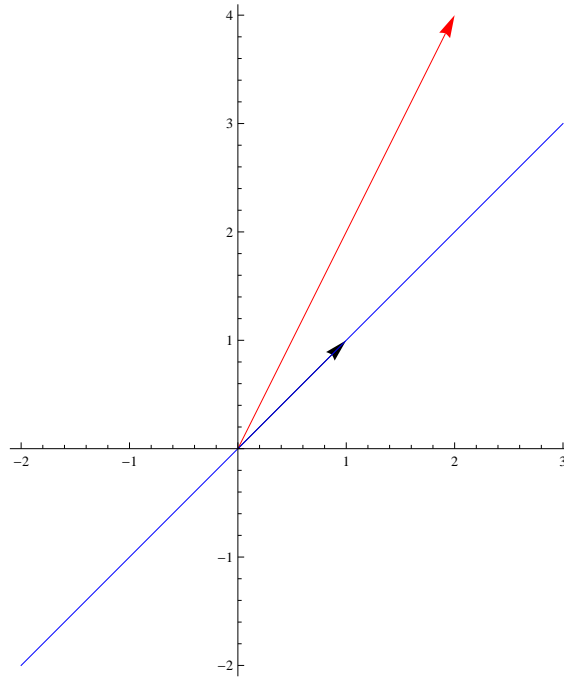
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Търсим числата  $x$  и  $y$  така, че линейната комбинация на вектор-стълбовете в лявата страна (означени в черно) да е равна на дясната страна (означена в червено).



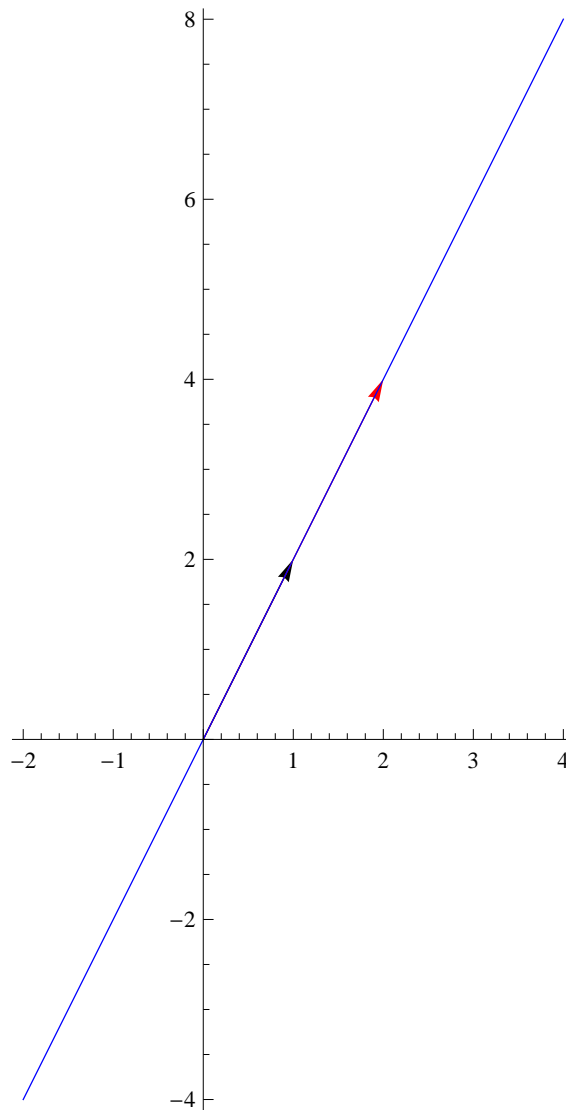
- Във втория пример двата вектора в лявата страна лежат на една права. Тогава всички техни линейни комбинации ще останат на същата права (означена в синьо). Следователно системата няма решение, тъй като нито една линейна комбинация не може да е равна на червения вектор.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$



- В третия пример векторите в лявата страна отново са равни, но дясната лежи на правата, определена от тях. Следователно системата има решение. По-точно тя има безброй много решения, тъй като, независимо колко далеч по правата "сме се придвижили" с първия вектор, то вторият може "да ни върне" до желаната точка.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

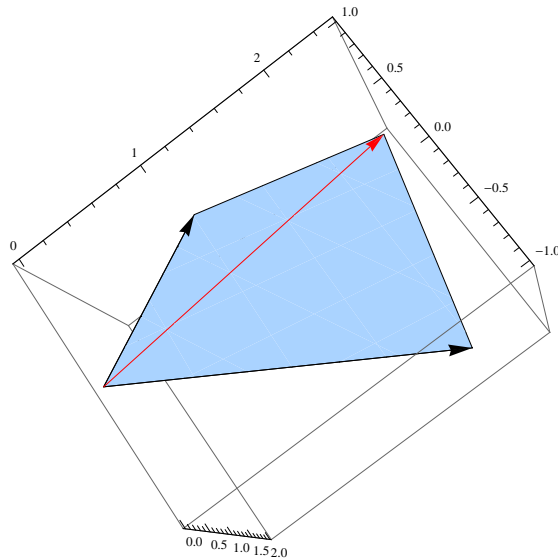
**N.B. 16**

Умножавайки дадена матрица отлясно с вектор-стълб, получаваме линейна комбинация на стълбовете на матрицата.

**Пример 36.** Да разгледаме още един пример, този път за система с три уравнения и две неизвестни, т.е. в лявата страна ще имаме само два тримерни вектора:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2.5 \end{bmatrix}.$$

Тогава можем да достигнем само точките в една равнина в тримерното пространство (защрихована е в синьо по-долу). Дясната страна (в червено) обаче лежи в същата равнина и следователно системата има решение.



**Задача.** Направете row picture за същата система.

На базата на предишните примери, можем да формулираме следното очевидно твърдение.

#### Твърдение 14

Необходимо и достатъчно условие за това дадена линеинна алгебрична система да има решение, е дясната страна да бъде в пространството, определено от вектор-стълбовете на матрицата на системата (ще го наричаме **column space**).

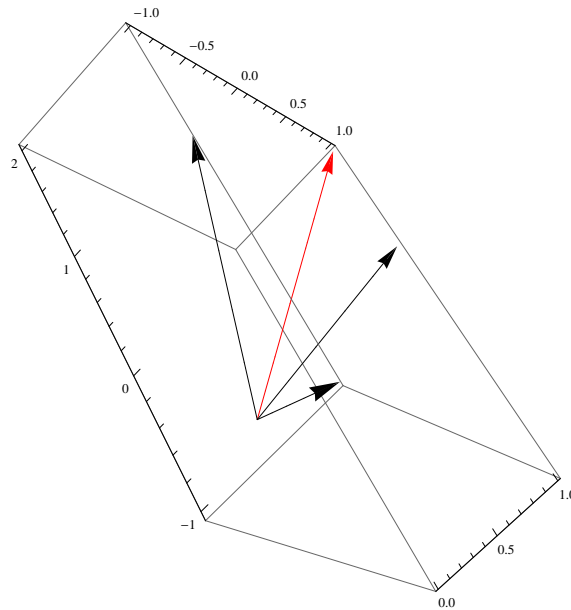
Предимството на column picture в сравнение с row picture е, че първото може непосредствено да се пренесе и в 3D, практически без промени. Идеята е толкова проста, че можем почти да “визуализираме” column picture и в 4 и повече измерения.

**Пример 37.** Да разгледаме системата

$$x + y + z = 1,$$

$$x - y - z = 1,$$

$$x + y - z = 2.$$



В този случай векторите в лявата страна сочат в три независими посоки и пораждат цялото  $\mathbb{R}^3$ . Следователно системата има единствено решение за всяка дясна страна.

### N.B. 17

Дадена линейна алгебрична система може да бъде визуализирана с нейните row picture и column picture.

Работейки по редове, търсим пресечните точки на хиперравнините в  $n$ -мерното пространство, определени от всяко уравнение.

Работейки по стълбове, търсим линейната комбинация на вектор-стълбовете на матрицата на системата, равна на вектор-стълба на десните страни.

Имайки геометрична интуиция, сме готови да характеризираме всички възможности за решенията на дадена линейна алгебрична система.

### Твърдение 15

За всяка линейна алгебрична система е в сила точно една от следните възможности:

- системата няма решения;
- системата има точно едно решение;
- системата има безброй много решения.

*Доказателство.* Вече показахме случаи, в които системата няма решения или има точно едно решение. Достатъчно е да докажем, че ако системата има две решения, то тя има безброй много.

Нека

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{Ay} = \mathbf{b}.$$

Тогава за всяко реално число  $\lambda$  векторът

$$\lambda x + (1 - \lambda)y$$

също е решение на системата. □

## 2.2 Четири основни подпространства на $\mathbb{R}^n$ , свързани с дадена матрица

Вече видяхме, че въпросът за решаването на дадена линейна алгебрична система е свързан с едно подпространство на  $\mathbb{R}^n$  – column space. Това ни дава основание да разгледаме по-подробно структурата на  $\mathbb{R}^n$ . Всъщност изучаването на структурата на  $\mathbb{R}^n$  е важно и поради факта, че всяко друго крайномерно пространство е еквивалентно на него (**що се отнася до операциите умножение със скалар и събиране**). Да припомним, че най-важният факт за линейните пространства е, че са множества, в които можем да пресмятаме линейни комбинации на два елемента и да оставаме в пространството.

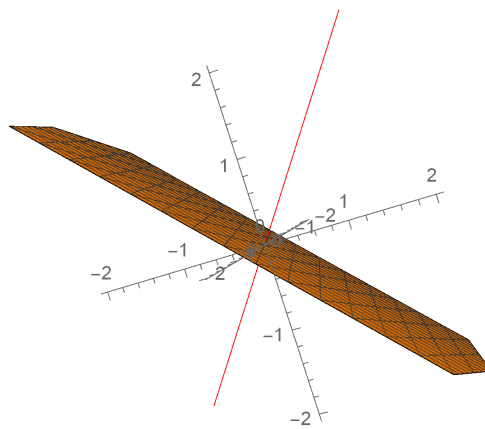
### Дефиниция 17

Подмножество на дадено линейно пространство  $\mathcal{A}$ , което само по себе си е линейно пространство, се нарича **подпространство** на  $\mathcal{A}$ .

**Пример 38.** Пространството  $\mathbb{R}^3$  е 3-мерно. То може да се визуализира чрез 3-мерното геометрично пространство, в което е въведена декартова координатна система.

Тривиалните му подпространства са цялото  $\mathbb{R}^3$  и  $\emptyset$ . 1-мерните и 2-мерните подпространства геометрично съответстват на прави и равнини, минаващи през началото на координатната система.

Лесно може да се съобрази, че нулевият вектор трябва да се съдържа във всяко подпространство, тъй като, ако съберем два противоположни вектора, получаваме  $\mathbf{0}$ .



**N.B. 18**

За да бъде дадено множество подпространство, то задължително съдържа нулевия елемент на пространството.

Очевидно е, че обединението на две подпространства не е задължително подпространство. Да вземем за пример два вектора – един от правата и друг от равнината на горната фигура. В общия случай тяхната сума не е в нито едно от двете подпространства.

От друга страна, може лесно да се види, че сечението на две линейни подпространства е линейно подпространство.

Четирите най-важни подпространства, свързани с  $\mathbb{R}^n$ , от гледна точка на линейната алгебра, са пряко свързани с дадена матрица  $A$ . Това са column space на  $A$  (ще го бележим с  $\mathcal{C}(A)$ ), row space на  $A$  (ще го бележим с  $\mathcal{R}(A)$ ), nullspace на  $A$  (ще го бележим с  $\mathcal{N}(A)$ ) и left nullspace на  $A$  (ще го бележим с  $\mathcal{N}(A^T)$ ). Нека е дадена матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . За да можем да изследваме тези пространства, трябва да намерим базис за всяко от тях и да определим техните размерности.

- **Column space  $\mathcal{C}(A)$ .** Вече дефинирахме това подпространство. То съдържа всички линейни комбинации на стълбове на  $A$  и следователно е подпространство на  $\mathbb{R}^m$ . Знаем, че за да има дадена система  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  решение, то  $\mathbf{b}$  трябва да се съдържа в  $\mathcal{C}(A)$ .
- **Row space  $\mathcal{R}(A)$ .** Row space на  $A$  се дефинира аналогично – то съдържа всички линейни комбинации на редовете на  $A$  и е подпространство на  $\mathbb{R}^n$ .
- **Nullspace  $\mathcal{N}(A)$ .** Nullspace съдържа всички решения на хомогенната система  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Да разгледаме следния пример.

**Пример 39.** Дадена е матрицата  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Търсим решенията на  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . За всяка система от този вид е очевидно, че  $\mathbf{0}$  е решение. Забелязвайки, че в този конкретен случай третият стълб на  $A$  е равен на сумата на първите два, можем да заключим, че друго решение е  $(1, 1, -1)^T$ . Всъщност всички вектори  $(c, c, -c)^T = c(1, 1, -1)^T$  са решения на системата. С други думи, можем да предположим, че  $\mathcal{N}(A)$  е едномерно подпространство на  $\mathbb{R}^3$ . Геометрично то може да бъде представено с права през началото на координатната система в 3D. Засега, разбира се, това е само обоснована хипотеза (както се оказва, вярна!), докато не видим как систематично да изследваме nullspace.

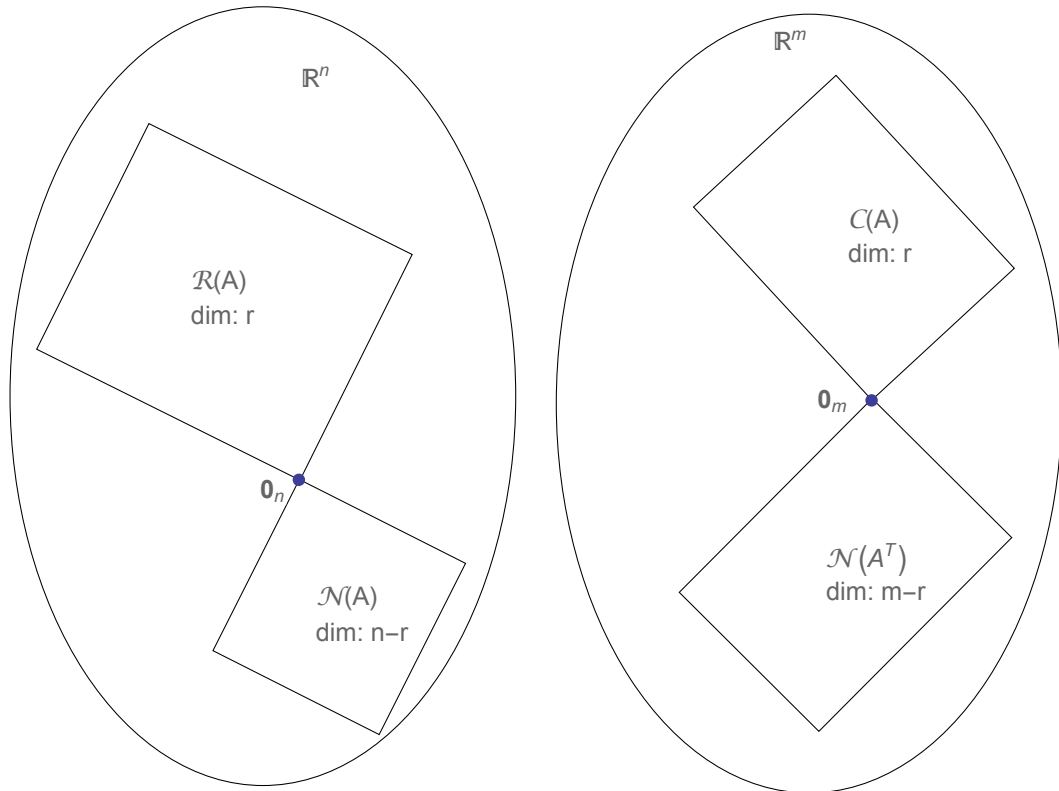
Първо, нека докажем, че  $\mathcal{N}(A)$  е линейно пространство. Действително, ако  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  са такива, че  $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$  и  $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ , тогава  $A(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$  и следователно  $\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(A)$ , т.е. всички линейни комбинации

на два вектора от  $\mathcal{N}(A)$  остават в  $\mathcal{N}(A)$ . Следователно  $\mathcal{N}(A)$  е линейно подпространство на  $\mathbb{R}^n$ .

**N.B. 19**

Единствено решенията на  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  образуват линейно пространство, тъй като за нито една друга система  $\mathbf{0}$  не е решение.

- **Left nullspace  $\mathcal{N}(A^T)$ .** Left nullspace на  $A$  се дефинира като nullspace на  $A^T$ . Следователно това е подпространство на  $\mathbb{R}^m$ .



Четири основни подпространства са (наред с останалите неща, които предстои да коментираме) представителни за двата основни начина да дефинираме едно линейно пространство – като зададем вектори, които го порождаат (например column и row spaces) или като зададем условия, които трябва да се изпълняват от векторите в пространството (например nullspace).

Сега трябва да отговорим на въпроса за размерностите и базисите на тези подпространства. Ефективен начин да изследваме основните подпространства е свързан със свеждането на матрицата до стъпаловиден вид (row echelon form, ref). Ще изясним идеите чрез пример.

**Пример 40.** Дадена е матрицата  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}.$$



Искаме, използвайки елементарни операции по редове, да сведем матриците до “прост” вид, който да съдържа необходимата ни информация.

Първо, трансформираме матрицата до вида

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Сега бихме искали да получим водещ елемент (главен елемент, pivot) във втория стълб, но дори с размяна на редовете това не може да се получи. Следователно не можем да направим нищо повече с втория стълб и продължаваме с третия:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =: U.$$

Матрицата  $U$  е в т.нар. стъпаловиден вид (ref). С други думи, елементите под всеки първи ненулев елемент в реда, наречен водещ елемент (ако има такъв), са нули.

В примера има два водещи стълба – първият и третият – и два свободни стълба (т.е. без водещи елементи в тях) – вторият и четвъртият.

### Дефиниция 18

Стълбовете, които съдържат водещи елементи, ще наричаме **водещи стълбове** а останалите – **свободни стълбове**. Броят на водещите елементи в ref на дадена матрица се нарича **ранг** на матрицата.

Вече сме готови да определим размерностите и да намерим базиси за четирите основни подпространства:

- Първо, лесно се съобразява, че row space (което е подпространство на  $\mathbb{R}^4$ ) не се променя при трансформации по редове. Наистина, всички редове на  $U$  са линейни комбинации на редовете на  $A$ . Освен това, тъй като елементарните трансформации са обратими, то редовете на  $A$  също могат да се получат като линейни комбинации на редовете на  $U$ . Следователно  $\mathcal{R}(A) \equiv \mathcal{R}(U)$ . Размерността на последното е равна на ранга  $r = 2$ . Базис може да бъде получен от векторите  $(1, 2, 2, 2)$  и  $(0, 0, 2, 4)$  или, еквивалентно, от съответните вектори в  $A$  –  $(1, 2, 2, 2)$  и  $(2, 4, 6, 8)$ .
- За column space (подпространство на  $\mathbb{R}^3$ ) горните разсъждения не са валидни. Операциите по редове променят column space. Например всички вектори в  $\mathcal{C}(U)$  имат нули като трета компонента, което не е така при векторите в  $\mathcal{C}(A)$ . Оказва се обаче, че водещите стълбове на  $A$ , т.е. първият и третият –  $(1, 2, 3)^T$  и  $(2, 6, 8)^T$  – образуват базис на  $\mathcal{C}(A)$  и неговата размерност също е равна на  $r = 2$ .

Действително, тъй като операциите по редове не променят решенията на дадена система, то  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  е изпълнено, точно когато  $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$  е в сила. Следователно едни и същи линейни комбинации (т.е. с равни коефициенти) на стълбове от  $A$  и на стълбове от  $U$  дават резултат  $\mathbf{0}$ . Тогава стълбовете на  $A$  са линейно независими тогава и само тогава, когато съответните стълбове в  $U$  са линейно независими.

- Размерността на nullspace е равна на броя на свободните стълбове,  $n - r = 2$ . Наистина, ние трябва да решим системата  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , за да определим nullspace на  $A$ . Ако поставим произволни стойности на неизвестните, отговарящи на свободните стълбове (ще ги наричаме свободни неизвестни), то водещите неизвестни ще могат да се определят еднозначно.

Да поставим произволни стойности всъщност е същото, като да изберем единични вектори и после да вземем всички техни линеини комбинации. Нека  $x_2 = 1, x_4 = 0$  и  $x_2 = 0, x_4 = 1$  (всъщност всеки други два линеино независими вектора биха свършили работа). Така получаваме два вектора, образуващи базис за nullspace –  $(-2, 1, 0, 0)^T$  и  $(2, 0, -1, 2)^T$ . И така, nullspace съдържа всички линеини комбинации на  $\alpha(-2, 1, 0, 0)^T + \beta(2, 0, -1, 2)^T$ , където  $\alpha$  и  $\beta$  са произволни реални числа.

- Аналогично размерността на left nullspace е  $m - r = 1$ . Базис може да бъде намерен, като се работи с  $A^T$ .

Ще обобщим резултатите за четирите основни подпространства в следващата теорема.

#### Твърдение 16: Основна теорема на линеината алгебра

Нека  $A$  е матрица  $m \times n$  с ранг  $r$ .

За четирите основни подпространства е в сила следното:

- Row space,  $\mathcal{R}(A)$ , и nullspace,  $\mathcal{N}(A)$ , са подпространства  $\mathbb{R}^n$ .
  - $\dim \mathcal{R}(A) = r$ ; базис може да бъде получен от водещите редове в  $A$  или от водещите редове в  $\text{ref } A$ ;
  - $\dim \mathcal{N}(A) = n - r$ ; базис може да бъде получен чрез решаване на системата  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  по следния начин – полагаме единични вектори на местата на свободните неизвестни и намираме съответните водещи неизвестни.
- Column space,  $\mathcal{C}(A)$ , и left nullspace,  $\mathcal{N}(A^T)$ , са подпространства на  $\mathbb{R}^m$ .
  - $\dim \mathcal{C}(A) = r$ ; базис може да бъде получен от водещите стълбове на  $A$  (водещите стълбове на  $\text{ref } A$  в общия случай не образуват базис на  $\mathcal{C}(A)$ );
  - $\dim \mathcal{N}(A^T) = m - r$ .

Освен това  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{N}(A)$ , както и  $\mathcal{C}(A)$  и  $\mathcal{N}(A^T)$ , са двойки ортогонални допълнения.

Преди да преминем към доказателството, трябва да изясним какво означава ортогонални подпространства и ортогонални допълнения/

**Дефиниция 19**

Казваме, че две подпространства са **ортогонални**, ако всеки елемент на едното е ортогонален на всеки вектор от другото.

Ако всички вектори, ортогонални на първото подпространство, се съдържат във второто и обратното, казваме, че двете подпространства са **ортогонални допълнения**. Ще означаваме ортогоналното допълнение на  $\mathcal{U}$  с  $\mathcal{U}^\perp$ .

Лесно се вижда, че ако две подпространства са ортогонални помежду си, те се пресичат само в нулевия вектор. Действително, ако вектор  $\mathbf{x}$  се съдържа и в двете подпространства, той трябва да бъде ортогонален на себе си, т.е. е нулевият вектор.

Два примера са ортогонални подпространства на  $\mathbb{R}^3$  са:

- две перпендикулярни прави, минаващи през началото на координатната система. Те не са ортогонални допълнения, тъй като съществува трета права, ортогонална на двете;
- равнина, перпендикулярна на права, минаващи през началото на координатната система. Двете подпространства са ортогонални допълнения, тъй като всички вектори, ортогонални на равнината, се съдържат в правата и обратното.

Вече сме готови да довършим доказателството на Основната теорема на линейната алгебра.

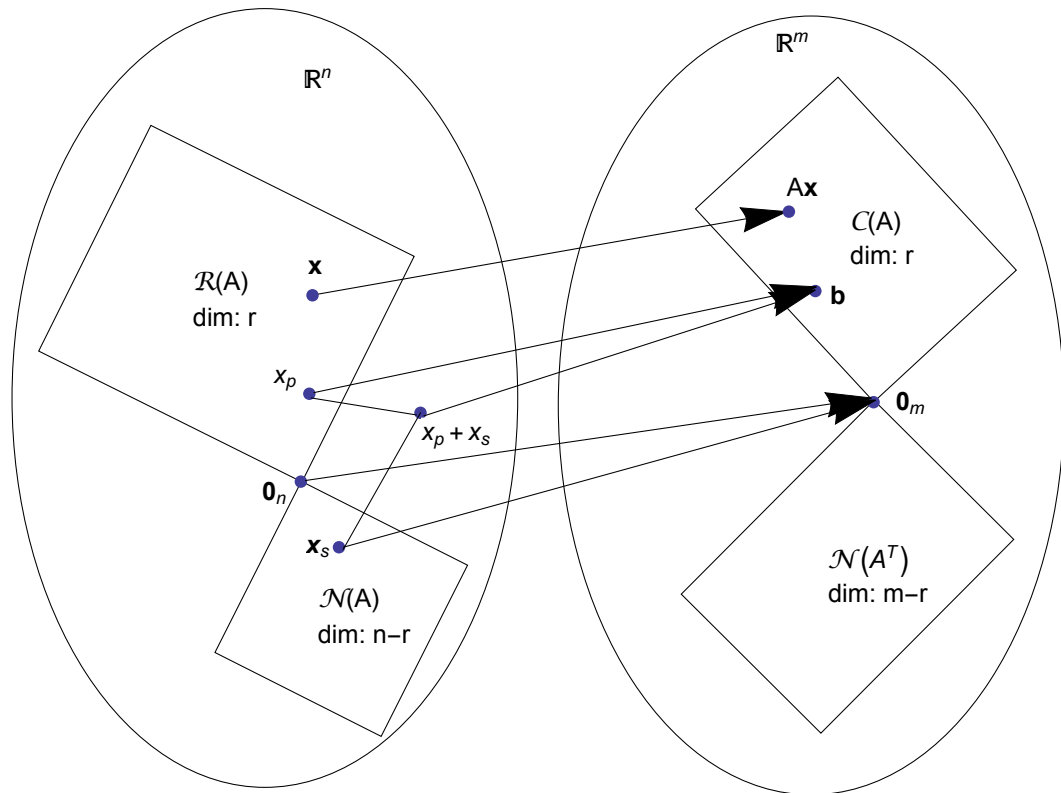
*Доказателство на Основната теорема на линейната алгебра.* За базисите и размерностите на основните подпространства, разсъжденията са непосредствено обобщение на примера, който направихме.

Остава да докажем, че двете двойки подпространства са ортогонални допълнения.

Ако  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A)$ , тогава  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  и следователно за всеки ред  $\mathbf{a}_i$  на  $A$  е в сила следното:  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ . Тъй като всеки вектор в  $\text{row } A$  е линейна комбинация на  $\mathbf{a}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , е ясно, че всеки вектор в  $\mathcal{R}(A)$  е ортогонален на  $\mathbf{x}$ .

Нещо повече, тъй като  $\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n$ , то не може да съществува вектор, ортогонален на кое да е от двете подпространства, който да не се съдържа в едното от тях. Иначе щяхме да намерим  $n + 1$  линейно независими вектора в  $\mathbb{R}^n$ .  $\square$

Казаното дотук може да бъде обобщено в следната фигура:



Ако вземем предвид, че матрицата  $A$  може да се разглежда като трансформация на векторите от  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ , стрелките показват къде отива всеки вектор. Да обърнем още веднъж внимание, че всички вектори от  $\mathbb{R}^n$  отиват в  $\mathcal{C}(A)$ . Затова това подпространство често се нарича **образ** на  $A$ .

Също така, е илюстриран основният факт, следващ от това, че двойките основни подпространства са ортогонални допълнения – всеки вектор може да бъде представен като компонента в едното подпространство плюс компонента в другото. Казано иначе, ако към базиса на едното подпространство добавим базиса на другото, ще получим базис на цялото пространство.

### 2.3 Линеините алгебрични системи и четирите основни подпространства

След като се запознахме с четирите основни подпространства на  $\mathbb{R}^n$ , сме готови да характеризираме всички решения на дадена произволна линеиня алгебрична система.

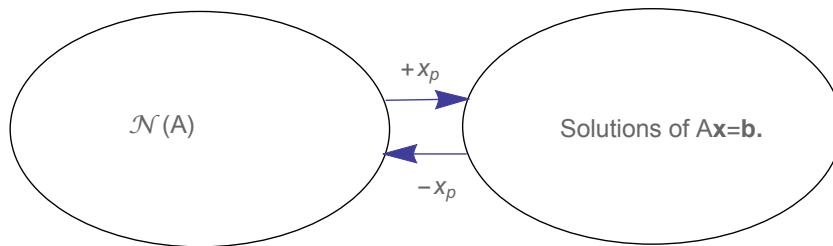
#### Твърдение 17

Нека  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  има решение за дадено  $\mathbf{b}$  и нека  $\mathbf{x}_p$  е решение. Тогава всички решения на  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  са множеството от векторите  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_s$ , за които  $\mathbf{x}_s$  е произволен елемент на  $\mathcal{N}(A)$ .

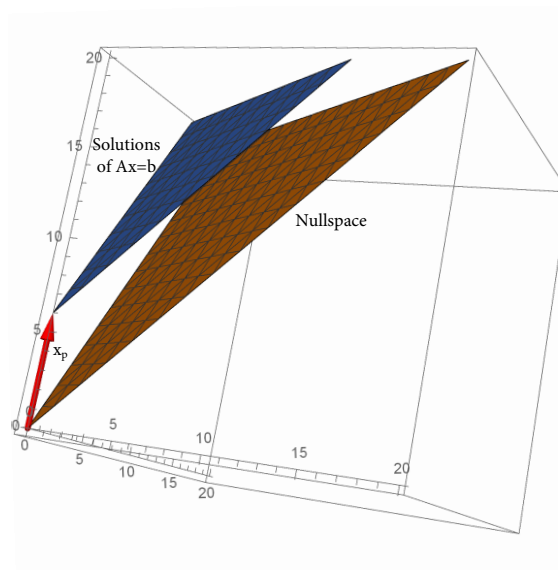
*Доказателство.* ( $\Rightarrow$ ) Първо, очевидно е, че ако  $\mathbf{x}_p$  е решение и  $\mathbf{x}_s \in \mathcal{N}(A)$ , тогава  $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_s$  също е решение, тъй като  $A(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_s) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_s = \mathbf{b} + \mathbf{0}$ .

( $\Leftarrow$ ) Остава да докажем, че ако  $\mathbf{x}_p$  е решение, тогава всички решения имат посочения вид. Действително, нека  $\mathbf{x}$  е кое да е друго решение. Тогава  $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{0}$  и следователно  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p \in \mathcal{N}(A)$ , което доказва твърдението.  $\square$

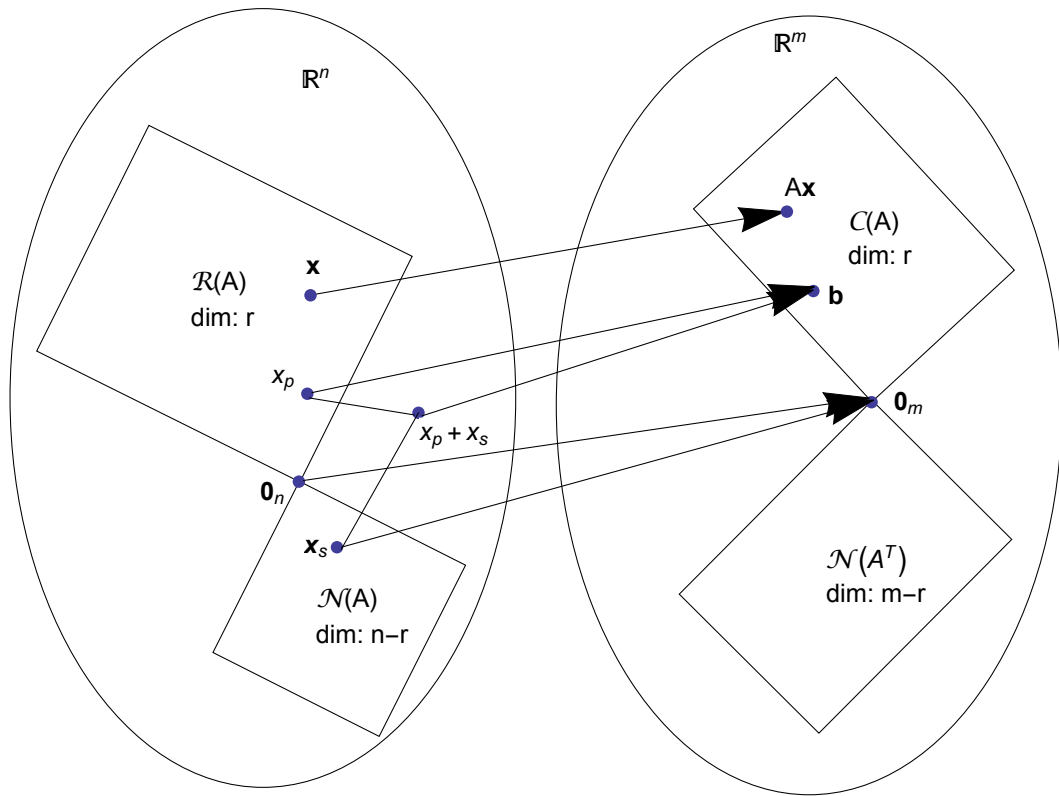
Можем да илюстрираме последния резултат със следната фигура:



В 3D графично нещата биха могли да изглеждат по следния начин:



За да разберем по-задълбочено твърдението, нека отново насочим вниманието си към четирите основни подпространства. Да разгледаме следната фигура:



Да направим следните наблюдения:

- Първо, да забележим, че за образа на всеки вектор  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)$  (и  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , изобщо) е  $A\mathbf{x} \in \mathcal{C}(A)$ , тъй като  $A\mathbf{x}$  дава линейна комбинация на стълбовете на  $A$ . Следователно можем да решим системата  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  само ако  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ .
- Обратното също е вярно – всеки вектор  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$  може да бъде получен от вектор  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)$ . Нещо повече,  $\mathbf{x}$  е единствен.

*Доказателство.*

□

- Четвъртото подпространство  $\mathcal{N}(A^T)$  не може да бъде достигнато от никой вектор от  $\mathbb{R}^n$ . Това подпространство обаче е важно при приближения по метода на най-малките квадрати, както ще видим по-късно в курса.
- Всички вектори от  $\mathcal{N}(A)$  се трансформират в  $\mathbf{0}_m$ .
- Тъй като  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{N}(A)$  са ортогонални допълнения, то всеки вектор от  $\mathbb{R}^n$  може да бъде представен като сума на вектор от  $\mathcal{R}(A)$  и вектор от  $\mathcal{N}(A)$ . В частност всички решения на  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (ако има такива) могат да бъдат представени като (единственото) частно решение от  $\mathcal{R}(A)$  (или кое да е друго частно решение) и произволен вектор от  $\mathcal{N}(A)$ .

**Задача.** Да предположим, че  $A$  е квадратна обратима матрица,  $m = n = r$ . Какво са  $\mathbf{x}_p$  и  $\mathbf{x}_s$ ?

Нека сега разгледаме случај, в којто матрицата  $A$  има пълен ранг по стълбове.

**Пример 41.** Вземаме за пример следната матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

и дясна страна  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ . Трансформираме разширената матрица до rref и получаваме

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & 2b_1 + b_3 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & b_1 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right].$$

Правейки още една стъпка, довеждаме системата до reduced row echelon form (rref), като правим всички водещи елементи 1, а останалите елементи във водещите стълбове – 0:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & \boxed{1} & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right].$$

Очевидно системата е несъвместима при  $b_1 + b_2 + b_3 \neq 0$  и съвместима – иначе. Във втория случай, тъй като няма свободни стълбове и следователно няма свободни неизвестни, съществува единствено решение

$$\mathbf{x} = (2b_1 - b_2, b_2 - b_1)^T.$$

Можем да обобщим примера по следния начин.

**N.B. 20**

Всяка матрица  $A$ , която има пълен ранг по стълбове, има следните свойства:

- Всички стълбове на  $A$  са водещи стълбове;
- Няма свободни неизвестни;
- Подпространството  $\mathcal{N}(A)$  съдържа само нулевия вектор  $\mathbf{0}$ ;
- Ако  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  има решение (може и да няма!), това решение е единствено;
- $A$  има ЛНЗ стълбове;
- $A^T A$  е обратима;
- $rref A$  е

$$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix};$$

- Rref на разширената матрица  $[A \ \mathbf{b}]$  е

$$\left[ \begin{array}{c|c} I & \mathbf{c} \\ 0 & \mathbf{d} \end{array} \right].$$

Ако  $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ , тогава  $\mathbf{x} = \mathbf{c}$  е единственото решение. Ако  $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ , тогава системата е несъвместима, т.е. няма решение;

- Row space е цялото  $\mathbb{R}^n$ .

Другият краен случай е, когато  $A$  има пълен ранг по редове. Тогава  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  има едно или безброй много решения. Да разгледаме следния пример:

**Пример 42.** Дадена е системата

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x + 2y - z &= 4. \end{aligned}$$

Трансформираме разширената матрица на системата до rref и получаваме последователно

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{array} \right] &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right] \quad (ref) \\ &\rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \end{array} \right] \quad (rref) \end{aligned}$$

Системата има пълен ранг по редове и следователно размерността на  $\mathcal{N}(A)$  е 1.

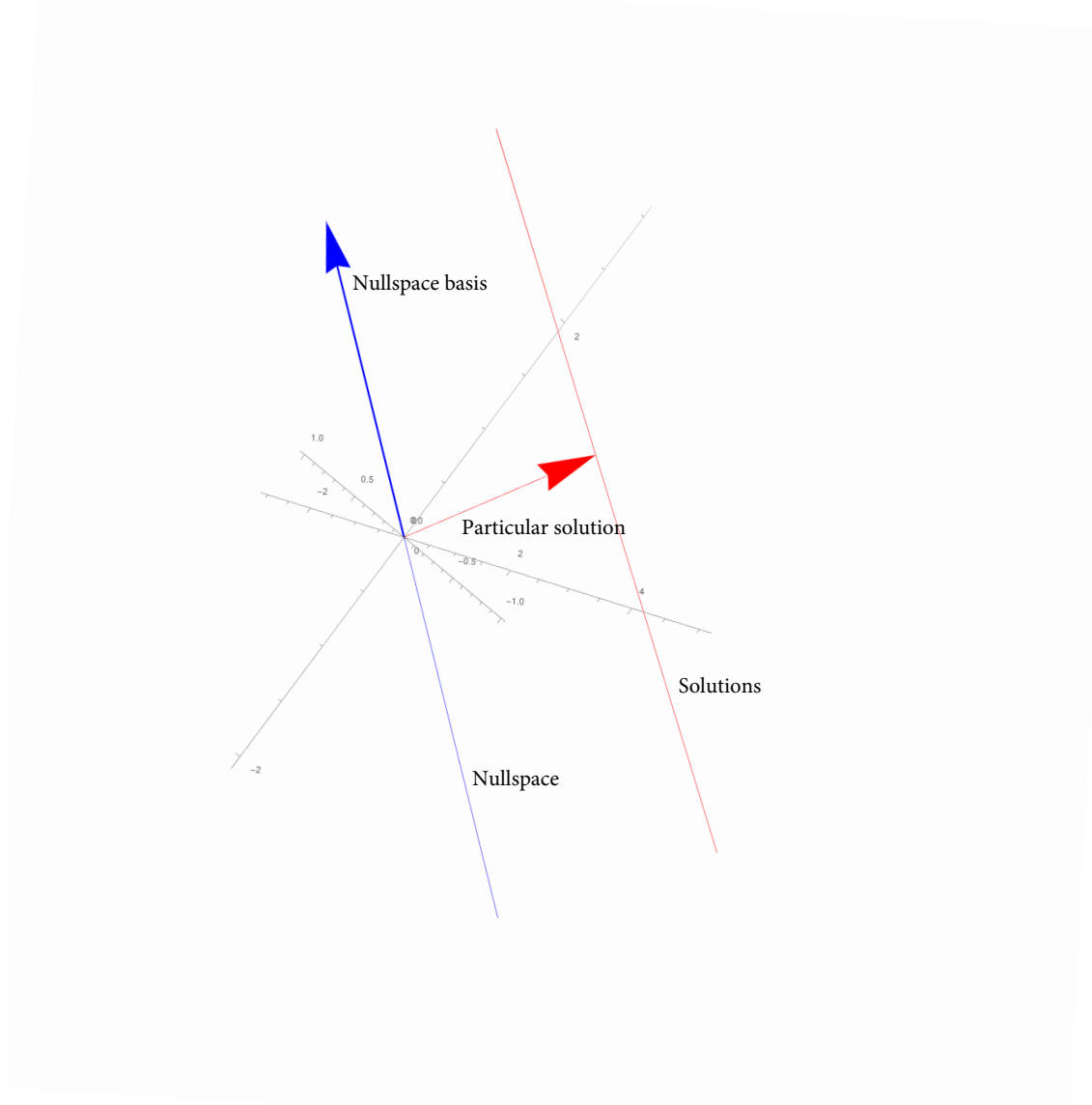
Лесно можем да получим едно частно решение, като положим всички свободни неизвестни да бъдат равни на 0. Получаваме  $\mathbf{x}_p = (2, 1, 0)^T$ . Замествайки



свободното неизвестно с 1, получаваме базис на 1-мерното подпространство  $\mathcal{N}(A)$ , който е  $\mathbf{x}_s = (-3, 2, 1)^T$ . Следователно всички решения имат вида

$$\mathbf{x} = (2, 1, 0)^T + \alpha(-3, 2, 1)^T, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

В този конкретен случай решението е права в тримерното пространство.



Обобщавайки горния резултат, можем лесно да видим, че rref на разширената матрица при пълен ранг по редове (след евентуално пренареждане на стълбове/неизвестни) има вида

$$[I \ F \ | \ \mathbf{d}]$$

и следователно съществува поне едно решение

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Освен това, тъй като има свободни неизвестни (освен ако  $A$  не е квадратна матрица), nullspace е нетривиален и следователно съществуват безброй много решения.

**N.B. 21**

Всяка матрица с пълен ранг по редове има следните свойства:

- Всички редове съдържат водещи елементи и  $\text{rref}$  няма нулеви редове;
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  има решение за всяка дясна страна  $\mathbf{b}$ . Ако  $r = m < n$ , тогава решенията са безброй много;
- Column space е цялото пространство  $\mathbb{R}^m$ ;
- Размерността на nullspace е  $n - r = n - m$ ;
- Редовете са ЛНЗ.

Базирайки се на досегашните наблюдения, можем да систематизираме възможностите за система линейни уравнения в зависимост от ранга  $r$  в следната таблица:

ранг	форма	брой решения на $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$\text{rref}$
$r = m$ и $r = n$	квадратна и обратима	1 решение	$[I]$
$r = m$ и $r < n$	къса и широка	$\infty$ решения	$[I \ F]$
$r < m$ и $r = n$	дълга и тясна	0 или 1 решение	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$
$r < m$ и $r < n$	неизвестна форма	0 или $\infty$ решения	$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

## 2.4 Линеини оператори

След като разгледахме въпроса за решаването на линейни алгебрични системи, се насочваме към другото важно приложение на матричното смятане – линеините трансформации в крайномерни пространства.

### Дефиниция 20

Казваме, че операторът  $T : U \rightarrow V$  е линеен, ако

$$T(\lambda u + \beta v) = \lambda Tu + \mu Tv, \forall u, v \in U, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

### 2.4.1 Матрица на линеен оператор

Нека разгледаме линеиния оператор  $T : U \rightarrow V$  и нека пространствата  $U$  и  $V$  са определени съответно с  $U = \text{span}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  и  $V = \text{span}(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m)$ . Тогава, ако вземем вектор  $\mathbf{x} \in U$ , той може да се представи като

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n.$$

Неговият образ под действието на трансформацията, използвайки линейността, е

$$T\mathbf{x} = \alpha_1 T\mathbf{x}_1 + \cdots + \alpha_n T\mathbf{x}_n = (T\mathbf{x}_1, \dots, T\mathbf{x}_n)(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

С други думи, за да изразим образа на кой да е вектор  $\mathbf{x}$ , е достатъчно да знаем образите на  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Ако те са съответно

$$T\mathbf{x}_1 = a_{11}\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{1m}\mathbf{y}_m,$$

.....

$$T\mathbf{x}_n = a_{n1}\mathbf{y}_1 + \cdots + a_{nm}\mathbf{y}_m,$$

получаваме

$$T\mathbf{x} = [\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Матрицата

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

е **матрица на трансформацията**  $T$ . В нейните стълбове стоят координатите на образите на базиса  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  по отношение на  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ .

### N.B. 22

Ако векторът  $\mathbf{x}$  има координати  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , то образът му  $\mathbf{y}$  има координати  $A\alpha$  по отношение на базиса  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ .

Важно е да отбележим, че матрицата на трансформацията  $A$  зависи от избора на базиси на  $U$  и  $V$ .

**Задача.** Да се намери матрицата на трансформацията  $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  при използване на стандартния базис. Каква е матрицата, ако първообразите се разглеждат по отношение на стандартния базис, а образите – по отношение на базиса  $\mathbf{l} = 2\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{m} = 2\mathbf{j}$ ?

**Задача.** Каква е матрицата на трансформацията  $Proj_{\mathbf{l}} : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$  при даден вектор  $\mathbf{l}$ , ако и за първообразите, и за образите се използва базисът  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ , където  $\mathbf{m}$  е единичен вектор, ортогонален на  $\mathbf{l}$ ?

**Задача.** Покажете, че трансформацията  $Rot_{\varphi} : \mathbb{R}_2 \rightarrow \mathbb{R}_2$  с въведен стандартният базис и за първообразите, и за образите, е

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

**Пример 43.** Нека разгледаме диференциалния оператор  $d/dx : P_2 \rightarrow P_2$  и нека използваме стандартния базис на  $P_2 - 1, x, x^2$ . Имаме  $d/dx(1) = 0$ ,  $d/dx(x) = 1$ ,  $d/dx(x^2) = 2x$ , т.е. за  $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$  е в сила

$$d/dx[P(x)] = [1, x, x^2] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

и матрицата на трансформацията при така въведените базиси е

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Да направим някои наблюдения, които илюстрират факта, че матрицата  $A$  на практика копира свойствата на оператора:

- Образът на  $d/dx$  е  $\text{span}\{1, x\}$ , а  $\mathcal{C}(A) = \text{span}\{(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T\}$ ;
- $\mathcal{N}(d/dx)$  е пространството от всички константи, а неговото ортогонално допълнение следователно е  $\text{span}\{x, x^2\}$ . За матрицата съответно имаме  $\mathcal{N}(A) = \text{span}\{(1, 0, 0)^T\}$ , а  $\mathcal{R}(A) = \text{span}\{(0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ .
- Матрицата  $A$  е необратима. Трансформацията – също, тъй като първообразът на даден образ е определен с точност до адитивна константа.

### 2.4.2 Матрица на линеен оператор и смяна на базисите

Често се налага по някаква причина да се смени базиса на пространството  $U$  или този на пространството  $V$ . Тук ще коментираме въпроса какво се случва с матрицата на трансформацията.

**Пример 44** (Смяна на базиса на пространството  $V$ ). Да вземем за пример трансформацията идентитет  $id: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Ако сме въвели стандартния базис, трансформацията се задава с единичната матрица:

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Нека сега направим смяна на базиса в образа, като въведем  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$  така, че

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{i} - \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Във векторно-матрична форма можем да запишем

$$[\mathbf{l}, \mathbf{m}] = [\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

или още, обръщайки матрицата в дясната страна,

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} =: [\mathbf{l}, \mathbf{m}]M.$$

Следователно за трансформацията получаваме

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Матрицата на трансформацията при промяна на базиса на образа се получава, като умножим отляво с матрицата на прехода  $M$ . Така, ако матрицата преди смяната на базиса е означена с  $A$ , новата матрица е  $MA$ .

**Пример 45** (Смяна на базиса в пространството  $U$ ). Този път ще изложим идеята за трансформацията  $Proj_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , където  $\mathbf{l} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ . Намирането на матрицата на трансформацията по отношение на стандартния базис  $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$  изисква повече технически пресмятания. От друга страна, ако изберем ортонормиран базис  $\mathbf{l}, \mathbf{m}$ , нещата изглеждат съвсем просто:

$$[\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Обикновено обаче даден вектор  $\mathbf{x}$  е дефиниран по отношение на стандартния базис. Следователно матрицата на трансформацията може да е по-добре да взема координати по отношение на  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  в пространството от първообразите. Имаме

$$[\mathbf{l}, \mathbf{m}] = [\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} =: [\mathbf{i}, \mathbf{j}]M^{-1}$$

и следователно можем да запишем

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{(\bar{\alpha}, \bar{\beta})^T} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Еквивалентно,

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix} \rightarrow [\mathbf{l}, \mathbf{m}] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{bmatrix}.$$

Следователно смяна на базиса в пространството от първообразите води до умножение отлясно с обратната матрица на преход. Новата матрица е  $AM^{-1}$ .

### N.B. 23

Нека матрицата  $A$  съответства на линейна трансформация  $T : V \rightarrow V$ , като и в пространството от първообразите, и в образа е въведен един и същ базис. Ако сменим този базис и матрицата на прехода е  $M$ , тогава матрицата на трансформацията при новия базис е  $\bar{A} = MAM^{-1}$ . Ще казваме, че двете матрици  $A$  и  $\bar{A}$  са подобни, тъй като представят една и съща трансформация при различни базиси.

**Задача.** Напишете матрицата на трансформация за диференциалния оператор  $d/dx : P_{2, \{1, x, x^2\}} \rightarrow P_{2, \{1, x, x^2\}}$ . Като я използвате, намерете матриците на трансформацията, ако се смени базиса на:

- пространството на първообразите;
- образа;
- и пространството на първообразите, и образа

с интерполационния базис, съответстващ на възлите  $0, 1/2, 1$ .

## 2.5 Собствен базис. Диагонализация на матрица.

Когато решаваме система линейни уравнения, се опитваме матрицата да бъде възможно най-проста, като в същото време не променяме решенията на системата. Видяхме ползите от привеждането на матрицата в `ref` или `rref`.

Когато матрицата описва линейна трансформация (при фиксирани базиси), отново бихме искали тя да е възможно най-проста, така че веднага “да разкрива” важните неща, свързани с трансформацията, и като цяло да бъде лесна за работа. Най-простият начин, по който матрица може да действа върху вектор от координати е ако матрицата е диагонална.

Разбира се, матрицата на даден оператор зависи от избора на базисите. Да разгледаме линейния оператор  $\mathcal{L} : V \rightarrow V$ , където  $V$  е  $n$ -мерно линейно пространство. Нека  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  образуват базис на  $V$ . Тогава, ако матрицата  $A$  на  $\mathcal{L}$  е диагонална в този базис, произволен вектор

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

трябва да се трансформира от  $\mathcal{L}$  в

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Но последното означава, че за базисните вектори следното трябва да бъде изпълнено:

$$\mathcal{L}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, \dots, \mathcal{L}\mathbf{x}_n = \lambda_n\mathbf{x}_n.$$

Този “хубав” базис, който изпълнява горните условия, се нарича **собствен базис** (eigenbasis) на  $\mathcal{L}$ .

### Дефиниция 21

Ненулевият вектор  $\mathbf{x}$  се нарича **собствен вектор** (eigenvector) за оператора  $\mathcal{L}$ , ако съществува  $\lambda \in \mathbb{C}$ , така че

$$\mathcal{L}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Числото  $\lambda$  се нарича **собствена стойност** или **собствено число** (eigenvalue).

### N.B. 24

Геометрично, собствените вектори на даден оператор са тези вектори, които запазват направлението си след трансформацията.

**Пример 46.** Нека  $Proj_{\mathbf{x}}$  означава проекцията върху даден вектор  $\mathbf{x}$ . Тогава собствените вектори са  $\mathbf{x}$  със съответстваща собствена стойност 1, и  $\mathbf{y} \perp \mathbf{x}$  със съответна собствена стойност 0 (нарисувайте картинка, с която да илюстрирате). Да забележим, че всеки вектор, колинеарен на  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  също е собствен вектор.

Очевидно е следното твърдение.

### Твърдение 18

Собствените вектори, съответстващи на дадена собствена стойност, допълнени с нулевия вектор, образуват линейно пространство. Всяко такова подпространство (съответстващо на всяка собствена стойност) се нарича собствено подпространство.

**Задача.** Докажете твърдението.

Остава да видим как можем да намерим собствения базис. Оказва се, че е по-удобно първо да намерим собствените стойности.

### Твърдение 19

Собствените стойности на матрицата  $A$  са решенията на уравнението

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

*Доказателство.* По дефиниция  $\lambda$  е собствена стойност, ако съществува ненулев вектор  $\mathbf{x}$  такъв, че

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

или, еквивалентно,

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

т.е.  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$ . Но това означава, че матрицата  $A - \lambda I$  няма пълен ранг, т.е. нейната детерминанта е 0.  $\square$

**Пример 47.** Да намерим собствените стойности и собствените вектори на матрицата

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Първо, намираме собствените стойности, решавайки

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Те са 0 и 5.

Тогава собствените вектори на  $A$  са в nullspace на следните матрици:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Два ЛНЗ собствени вектора са следователно  $\mathbf{x}_1 = (-2, 1)^T$  и  $\mathbf{x}_2 = (1/2, 1)^T$ .

### N.B. 25

Да отбележим, че  $\lambda_1 = 0$  е собствена стойност на матрицата  $A$  т.с.т.к.  $A$  е сингулярна.

**Пример 48.** Матрицата

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

отговаря на ротация на  $90^\circ$  по отношении на стандартния базис. Собствените стойности са чисто имагинерни:  $\pm i$ . Това може да се очаква, тъй като нито един реален вектор не може да запази посоката си след ротация.

### Твърдение 20

За собствените стойности на матрицата  $A$  е в сила

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \dots + \lambda_n &= \text{trace}(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}, \\ \lambda_1 \dots \lambda_n &= \det(A). \end{aligned}$$

Освен това, ако матрицата  $A$  е триъгълна, нейните собствени стойности лежат по главния диагонал.

### Диагонализация на матрица

Една много полезна декомпозиция на дадена матрица е пряко свързана с казаното дотук.

### Твърдение 21

Нека матрицата  $A$  има (не задължително различни) собствени стойности  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  и съответстващи ЛНЗ собствени вектори  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Тогава  $A$  може да се разложи във вида

$$A = T\Lambda T^{-1},$$

където  $T$  е матрица, чиито стълбове са собствените вектори на  $A$ , а  $\Lambda$  е диагонална матрица със собствените стойности на  $A$  по главния диагонал.

*Доказателство – първи начин.* Твърдението се доказва непосредствено, ако мислим за матрицата  $A$  като за изображение  $\mathcal{L}$  от дадено  $n$ -мерно пространство  $V$  в себе си при фиксиран базис. Тогава собствените вектори на  $A$  съдържат координатите на собствените вектори на  $\mathcal{L}$  в дадения базис. От казаното в предходната секция за смяна на базиса твърдението следва непосредствено – матрицата  $\Lambda$  е матрица на същата трансформация, като сменим базиса и на пространството от първообразите, и на образа със собствения базис.  $\square$



*Доказателство – втори начин.* Можем да докажем твърдението и директно:

$$\begin{aligned}
 T^{-1}AT &= T^{-1}A \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \\
 &= T^{-1} \begin{bmatrix} | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \\
 &= T^{-1} \begin{bmatrix} | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n \\ | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\
 &= \Lambda.
 \end{aligned}$$

□

Не всяка матрица е диагонализируема, тъй като не всяка матрица има  $n$  ЛНЗ собствени вектора. Достатъчно (но не необходимо) условие за диагонализируемост е всички собствени стойности да са различни.

### Твърдение 22

На различни собствени стойности съответсват ЛНЗ собствени вектори.

*Доказателство.* Нека  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  са два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  на матрицата  $A$  и нека

$$c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}.$$

Умножавайки двете страни с  $A$  и с  $\lambda_2$ , получаваме съответно

$$\begin{aligned}
 c_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{0}, \\
 c_2 \lambda_2 \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

и следователно

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \implies c_2 = 0.$$

Аналогично се проверява, че  $c_1 = 0$ , т.е. векторите  $\mathbf{x}_1$  и  $\mathbf{x}_2$  са ЛНЗ. □

Един особено важен клас диагонализируеми матрици са симетричните матрици. Може да се докаже, че следното е в сила.

### Твърдение 23

Ако  $A$  е  $n \times n$  симетрична матрица, тогава съществува ортонормиран собствен базис и съответните собствени стойности са реални числа (казано с други думи всеки две собствени подпространства са ортогонални помежду си). Еквивалентно, диагонализацията на  $A$  се дава от

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

където  $Q$  е ортонормирана матрица.

### Какво ни дава диагонализацията

Тук ще се спрем на няколко важни въпроса, свързани с приложенията на диагонализацията.

- Пресмятане на степени на  $A$ . Ако знаем диагонализацията  $A = T\Lambda T^{-1}$ , тогава

$$A^n = (T\Lambda T^{-1})(T\Lambda T^{-1}) \dots (T\Lambda T^{-1}) = T\Lambda^n T^{-1}.$$

- Пресмятане на обратната матрица. Може лесно да се провери, че

$$A^{-1} = T\Lambda^{-1}T^{-1}.$$

- Ако матрицата означава дадена трансформация, тя дава веднага съществената информация за изображението в диагоналната матрица – дали е обратимо, дали е свиващо, можем лесно да прилагаме изображението многократно и т.н.
- Ако диагоналната матрица съдържа само положителни елементи, матрицата/трансформацията е положително определена;
- Позволява ни намиране на апроксимация от по-нисък ред на матрицата (ще коментираме по-подробно този въпрос, когато говорим за по-общата декомпозиция по сингулярни стойности).
- Дава информация за обусловеността на матрицата (отново ще коментираме по-подробно в темата “Декомпозиция по сингулярни стойности”).

## 2.6 Метод на най-малките квадрати – линеини задачи

Както видяхме, съществуват три случая за решенията на дадена линеинна алгебрична система:

- единствено решение;
- безброй много решения (в този случай, за да изберем “правилното” решение в контекста на конкретната задача, може да е въведен допълнителен критерий, например решението с най-малка норма/което съответства на минимална енергия и т.н.);
- няма решения.

Сега ще се концентрираме върху последния случай, защото той е много важен на практика.

Да разгледаме следната задача.

Дадени са точките  $(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)$ . Търсим  $\varphi = \sum_{j=1}^n q_j \varphi_j \in V = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$  така, че  $\varphi$  да минава възможно най-близо до дадените точки.

В общия случай  $\varphi$  може да е функция на много променливи.

При  $n = s$  задачата е всъщност интерполационна задача, която (при достатъчно добре избран базис на крайномерното пространство  $V$ ) има единствено решение за произволни различни възли и съответни стойности. На тази задача очевидно съответства линейна алгебрична система за коефициентите  $(q_1, \dots, q_n)^T$ , която има квадратна матрица.

Интересният за нас случай е  $n < s$ . Тогава е ясно, че не можем да се надяваме интерполационната задача да има решение за произволен избор на точки. В този случай търсим оптимално решение. Ще разбирате последното в смисъла на метода на най-малките квадрати и ще формулираме съответната задача по три еквивалентни начина.

### Формулировка на (линейната) задача за най-малки квадрати (НМК)

1. Добре познатата формулировка от курсовете по числени методи е следната. Търсим коефициентите в обобщения полином  $\varphi(x)$  така, че

$$\varepsilon(q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^s (\varphi(x_i) - y_i)^2 \rightarrow \min_{(q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n}.$$

2. Търсим вектора от коефициентите  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  така, че

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{q})\|_2^2 \rightarrow \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n},$$

където  $\mathbf{r}(\mathbf{q}) = (\varphi(x_1) - y_1, \dots, \varphi(x_s) - y_s)^T$  е векторът на грешката.

*Забележка.* Тази формулировка е може би най-обща, тъй като можем да минимизираме и по отношение на коя да е друга норма. Работата с втората норма обаче има някои съществени предимства. Първо, векторът на грешката е минимален в смисъла на стандартната Евклидова дължина. Второ, нормата е породена от скалярно произведение, т.е. можем да използваме общата теория и всички предимства на работата в Хилбертови пространства.

Да обърнем внимание и че тази формулировка може да се използва и в случая, когато коефициентите участват нелинейно, за разлика от следващата.

3. Езикът на линейните задачи е линейната алгебра, съответно векторно-матричното смятане. Следователно, когато коефициентите участват линейно (както в задачата, която си поставихме) можем да запишем следната преопределена система:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(x_s) & \cdots & \varphi_n(x_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

или, записано кратко,

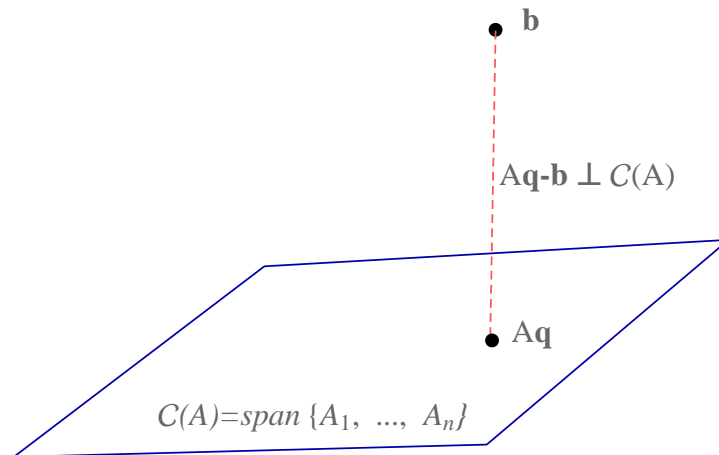
$$A\mathbf{q} = \mathbf{b}.$$

Решаването на последната система трябва да се разбира в следния смисъл:

$$\|A\mathbf{q} - \mathbf{b}\| \rightarrow \min_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n}.$$

### Нормални уравнения за намиране на оптималното решение

В случая когато задачата е линеиня, е най-естествено да разглеждаме системата (2.1). Първо, да обърнем внимание, че ако  $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(A)$ , тогава системата има точно решение и грешката е 0, т.е. намираме интерполант. Нека сега разгледаме общия случай, т.е. ще допускате възможността  $\mathbf{b} \notin \mathcal{C}(A)$ . С други думи, нашата задача е да определим  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  така, че  $A\mathbf{q} \in \mathcal{C}(A)$  да е възможно най-близко до  $\mathbf{b}$  (в смисъла на  $\|\cdot\|_2$ -нормата). Доказвали сме, че в едно Хилбертово пространство това се постига т.с.т.к.  $A\mathbf{q}$  е ортогоналната проекция на  $\mathbf{b}$  в  $\mathcal{C}(A)$ :



С други думи, трябва да определим  $\mathbf{q}$  така, че

$$(\mathbf{b} - A\mathbf{q}, A_i) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

където  $A_i$  са стълбовете на  $A$ . Последното условие е същото като

$$A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

или

$$A^T A\mathbf{q} = A^T \mathbf{b}.$$

Получихме т.нар. **нормални уравнения**. Да забележим, че ако  $A$  има пълен ранг по стълбове (засега ще се ограничим до този случай, тъй като той е най-важен на практика), матрицата  $A^T A$  е квадратна, обратима, симетрична и положително определена.

#### Твърдение 24: Нормални уравнения за линеиня задача за НМК

Нека  $A$  е матрица с пълен ранг по стълбове. Тогава оптималното решение (в смисъла на метода на най-малките квадрати) на преопределената система  $A\mathbf{q} = \mathbf{b}$  е единственото решение на

$$A^T A\mathbf{q} = A^T \mathbf{b}.$$

Да обърнем внимание, че матрицата на системата нормални уравнения е всъщност добре познатата матрица на Грам за базиса  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$  по отношение на стандартното скалярно произведение в  $\mathbb{R}^s$ . Ще разпишем системата по-подробно, като я изведем по още един начин – на база на аналитични съображения.

Изхождайки от първата формулировка на задачата, необходимо условие за това функцията  $\varepsilon(q_1, \dots, q_n)$  да достига минимум е частните ѝ производни да се нулират:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_j} = 2 \sum_{i=1}^s (q_1 \varphi_1(x_i) + \dots + q_n \varphi_n(x_i) - y_i) \varphi_j(x_i) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Записана във векторно-матрична форма системата има следния вид:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \varphi_1(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^s \varphi_1(x_i) \varphi_n(x_i) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^s \varphi_n(x_i) \varphi_1(x_i) & \cdots & \sum_{i=1}^s \varphi_n(x_i) \varphi_n(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^s \varphi_1(x_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^s \varphi_n(x_i) y_i \end{bmatrix}.$$

Да обърнем още веднъж внимание, че това е същата система от нормални уравнения, изведена по друг начин.

### N.B. 26

Макар нормалните уравнения да изглеждат като прост подход за намиране на решение по метода на най-малките квадрати, много често на практика те не могат да се използват, защото системата е много лошо обусловена.

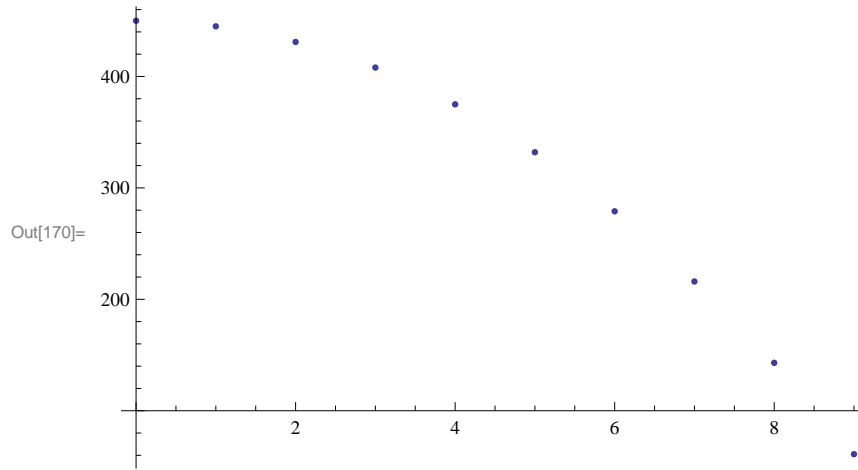
## Метод на Холецки за решаване на системи със симетрични и положително-определени матрици

В случаите, когато нормалните уравнения могат да се използват, класическият подход за тяхното решаване, като се вземе предвид че матрицата на системата е симетрична и положително-определена, е като се използва методът на Холецки. Нека го припомним накратко. За повече информация, виж [2].

**Пример 49.** Тяло е пуснато от височина  $450m$ . Неговата височина е измервана през интервали от 1 сек. Данните са систематизирани в следната таблица:

$t, sec$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$h, m$	450	445	431	408	375	332	279	216	143	61

Търсим подходяща функция, описваща процеса. Нека първо да изобразим точките. Графиката изглежда по следния начин



Точките изглеждат да лежат върху парабола. Затова ще търсим функцията, моделираща процеса, във вида  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . За да определим по метода на най-малките квадрати коефициентите на полинома, вземайки предвид казаното дотук, трябва да решим системата

$$A^T A \mathbf{q} = A^T \mathbf{b},$$

където

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 9 & 81 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 450 \\ 445 \\ 431 \\ 408 \\ 375 \\ 332 \\ 279 \\ 216 \\ 143 \\ 61 \end{bmatrix}.$$

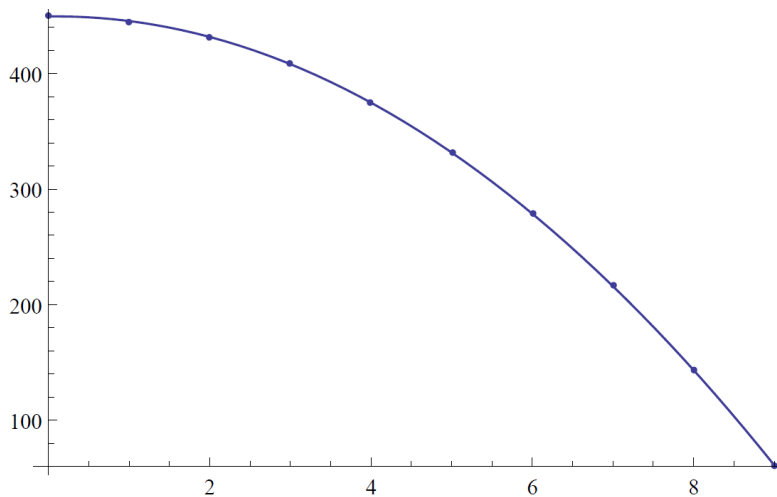
Нека означим  $B := A^T A$ ,  $\mathbf{c} := A^T \mathbf{b}$ . Тогава системата, която трябва да решим, е  $B \mathbf{q} = \mathbf{c}$ . Първо, ще разложим матрицата  $B$ , която е симетрична и положително определена по метода на Холецки. Например използвайки Mathematica, получаваме, че  $B = LL^T$ , където матрицата  $L$  има вида

$$L = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 9\sqrt{\frac{5}{2}} & \sqrt{\frac{165}{2}} & 0 \\ 57\sqrt{\frac{5}{2}} & 9\sqrt{\frac{165}{2}} & 4\sqrt{33} \end{bmatrix}.$$

Остава да решим системата  $LL^T \mathbf{q} = \mathbf{c}$  на две стъпки, като решаваме системи с триъгълни матрици.

1. Намираме  $\mathbf{z} := L^T \mathbf{q}$ , като решим системата  $L\mathbf{z} = \mathbf{c}$ .
2. Решаваме системата  $L^T \mathbf{q} = \mathbf{z}$  и намираме неизвестните  $\mathbf{q}$ .

Окончателно получаваме  $\mathbf{q} = (449.364, 0.962121, -4.90152)^T$ .



## 2.7 Декомпозиция по сингулярни стойности (SVD). Псевдообратни матрици.

Както отбелязахме, нормалните уравнения често водят до съществени проблеми при числени пресмятания. По принцип “тежката артилерия”, когато става въпрос за такива, е декомпозицията по сингулярни стойности (SVD = singular value decomposition). Тя има много приложения, някои от които ще коментираме, но основната ни цел в момента ще бъде да получим решение на линейната задача за НМК.

### SVD

Разглеждаме произволна матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с ранг  $r$ . Можем да си мислим, че тя съответства на някаква линейна трансформация, която без ограничение на общността е от  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ .

#### N.B. 27

SVD има много приложения, които нямат нищо общо с представата за дадена матрица като линейна трансформация. Разглеждането на основните подпространства обаче отново се оказва незаменимо при изучаване на тази декомпозиция.

Ще се опитаме да обобщим идеята на диагонализацията, като по този начин получим диагонална матрица на произволна трансформация или, казано иначе, разложим произволна матрица до вид, подобен на диагонализацията. Нещо повече, ще се стремим към “най-добрата” възможна диагонализация, т.е. с ортогонални матрици.

И така, нека  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  е ортонормиран базис на  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_n$  е ортонормиран базис на  $\mathcal{N}(A)$ . Освен това, нека  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  е ортонормиран базис на  $\mathcal{C}(A)$  и  $\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_m$  е ортонормиран базис на  $\mathcal{N}(A)$ .

Тогава за всеки вектор  $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ , прилагайки трансформацията, представена с  $A$ , получаваме

$$\alpha_1 A \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_r A \mathbf{v}_r = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \beta_r \mathbf{u}_r \in \mathcal{C}(A).$$

Следователно, ако изберем “хубави базиси” на  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{C}(A)$ , то можем да получим диагонална матрица на трансформацията. Тези базиси очевидно трябва да изпълняват следното:

$$A\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i, i = \overline{1, r}. \quad (2.2)$$

Ще наричаме  $\sigma_i$  сингулярни стойности, а  $\mathbf{v}_i, \mathbf{u}_i$  – сингулярни вектори на  $A$ .

Така, разсъждавайки както при диагонализацията, ще получим декомпозиция

$$A = U\Sigma V^T,$$

където  $\Sigma$  е диагонална матрица, съдържаща сингулярните стойности, а  $U$  и  $V$  са ортогонални матрици, съдържащи сингулярните вектори.

На пръв поглед изглежда, че не постигнахме много с досегашните разсъждения, тъй като трябва да намерим два различни набора от неизвестни вектори  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{v}_i$ , както и съответните сингулярни стойности  $\sigma_i$ . Оказва се обаче, че е в сила следното твърдение.

### Твърдение 25

Всяка матрица  $A$  може да се разложи във вида

$$A = U\Sigma V^T,$$

където  $U$  е ортогонална матрица, съдържаща собствените вектори на  $AA^T$ ,  $V$  е ортогонална матрица, съдържаща собствените вектори на  $A^T A$ , а  $\Sigma$  е диагонална матрица, съдържаща по главния диагонал квадратните корени на собствените стойности на  $AA^T$  (или, което е същото, на  $A^T A$ ).

*Доказателство.*

$$A^T A = V\Sigma U^T U \Sigma V^T = V \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^2 \end{bmatrix} V^T.$$

Последното очевидно е диагонализацията на симетричната и положително определена матрица  $A^T A$ . Следователно  $V$  съдържа собствените вектори на  $A^T A$ , а  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , където  $\lambda_i$  са собствените стойности на  $A^T A$ . Аналогично  $U$  съдържа сингулярните стойности на  $AA^T$ , сингулярните стойности са също квадратните корени на собствените стойности на  $AA^T$ .  $\square$

Има две основни форми на SVD.

- Съкратена форма, в която използваме само  $r$  сингулярни вектора, نامерени от (2.2) (това са “важните части от базисите”, т.е. базисите на  $\mathcal{R}(A)$  и  $\mathcal{N}(A)$ ). В този случай  $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$ .
- За да получим пълната форма, трябва да изберем произволни ортогонални вектори от  $\mathcal{N}(A)$  и  $\mathcal{N}(A^T)$  (например използвайки метода на Gram-Schmidt) за да допълним базисите на  $\mathbb{R}^n$  и  $\mathbb{R}^m$ , съответно. В този случай  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .



### Приложение на SVD за решаване на линейни задачи за НМК. Псевдообратна матрица.

Слдващите редове ще посветим на основния резултат в тази тема.

#### Твърдение 26

Нека е дадена следната линейна задача за НМК:  $A\mathbf{q} = \mathbf{b}$  и нека сме намерили съкратената SVD  $A = U\Sigma V^T$ . Тогава оптималното решение е

$$\mathbf{q} = A^+\mathbf{b},$$

където  $A^+$  е псевдообратната матрица (обратна матрица на Мооре–Penrose):

$$A^+ = V\Sigma^+U^T,$$

а  $\Sigma^+$  е диагонална матрица, съдържаща реципрочните на сингулярните стойности.

*Доказателство.* Нека разгледаме основните подпространства, свързани с  $A^+$ :

- Матрицата  $A^+$  се получава, като умножим  $U^T$  отляво с нещо. Следователно редовете на  $A^+$  са линейни комбинации на редовете на  $U^T$ , т.е. на сингулярните вектори  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ . Тогава  $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{C}(A)$ . Оттук веднага следва и че  $\mathcal{N}(A^+) = \mathcal{N}(A^T)$ ;
- За всяко  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  образът  $A^+\mathbf{b}$  се получава, като умножим матрицата  $V$  отдясно с някакъв вектор, т.е. е линейна комбинация на  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ . С други думи  $\mathcal{C}(A^+) = \mathcal{R}(A)$ .

Всеки вектор  $\mathbf{b}$  можем да разложим на сума от компонента в  $\mathcal{C}(A)$  и компонента в  $\mathcal{N}(A^T)$ :  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_C + \mathbf{b}_N$ . Вземайки предвид горните наблюдения, можем да заключим, че

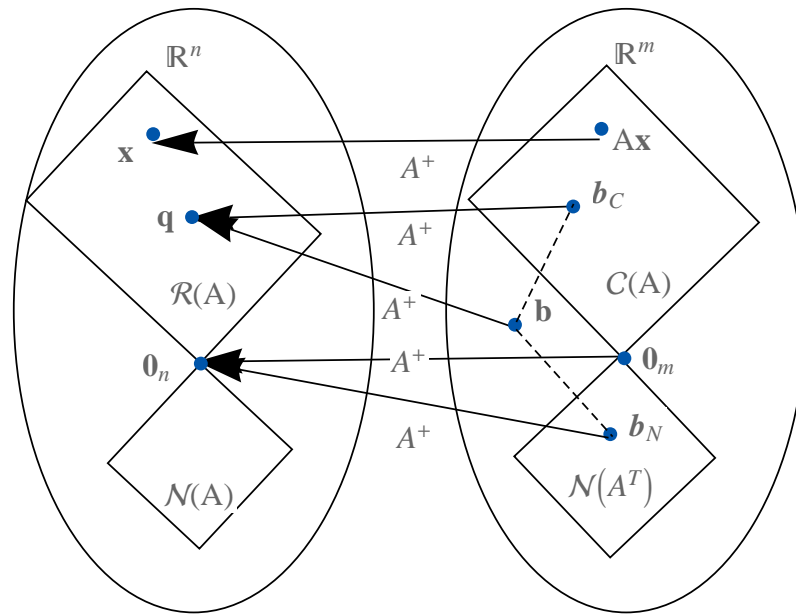
$$\mathbf{q} = A^+\mathbf{b} = A^+(\mathbf{b}_C + \mathbf{b}_N) = A^+\mathbf{b}_C.$$

Оптималното решение по метода на НМК трябва да е решение на системата  $A\mathbf{q} = \mathbf{b}_C$ . Нека се уверим в това:

$$A(A^+\mathbf{b}) = U\Sigma V^T V\Sigma^+U^T\mathbf{b}_C = \mathbf{b}_C.$$

С това доказателството е завършено. □

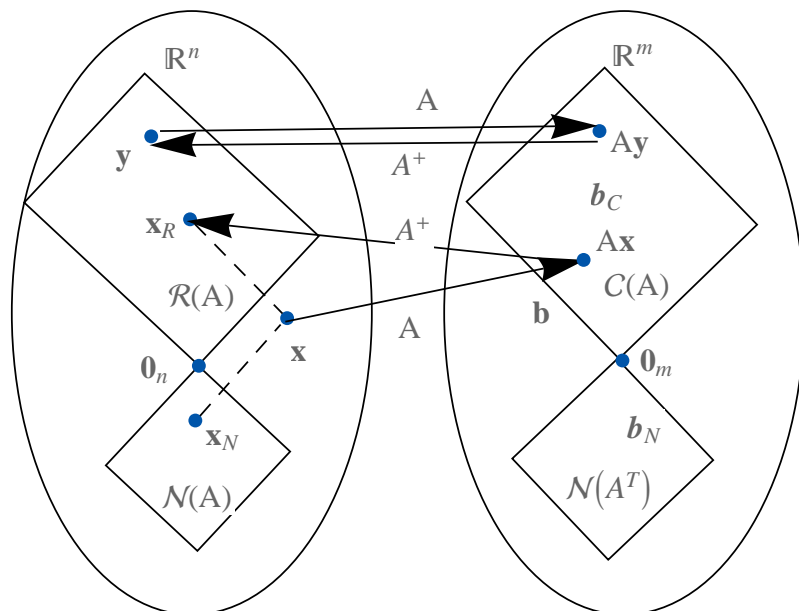
Можем да илюстрираме горното със следната фигура:



*Забележка.* Да отбележим, че аналогично доказателство може да се направи и ако се използва пълната форма на SVD. Допълнителните стълбове в  $U$  и  $V$  нямат никакъв принос, тъй като се умножават с  $0$ .

Да отбележим някои основни свойства на  $A^+$ :

- Ако  $A$  е квадратна и обратима, тогава  $A^{-1} = A^+$ ;
- Връзката между  $A$  и  $A^+$  илюстрираме със следната фигура:



**Пример 50.** Да разгледаме отново пример 49. Този път нека разложим  $A$ . Получаваме (като използваме Mathematica, която връща пълната форма на

SVD):

$$U \approx \begin{bmatrix} 0.00015 & -0.091 & 0.78 & -0.36 & 0.27 & 0.31 & 0.24 & 0.14 & 0.051 & -0.051 \\ 0.0091 & -0.26 & 0.46 & 0.81 & -0.077 & -0.11 & -0.10 & -0.097 & -0.11 & -0.13 \\ 0.034 & -0.38 & 0.20 & -0.46 & -0.36 & -0.43 & -0.36 & -0.28 & -0.22 & -0.19 \\ 0.075 & -0.44 & 0.0072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.90 \\ 0.13 & -0.44 & -0.12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & -0.22 \\ 0.20 & -0.39 & -0.18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.80 & -0.31 & -0.20 \\ 0.29 & -0.28 & -0.18 & 0 & 0 & 0 & 0.75 & -0.39 & -0.25 & -0.16 \\ 0.40 & -0.11 & -0.12 & 0 & 0 & 0.73 & -0.43 & -0.26 & -0.16 & -0.086 \\ 0.52 & 0.11 & 0.013 & 0 & 0.71 & -0.42 & -0.20 & -0.080 & -0.019 & 0.010 \\ 0.65 & 0.39 & 0.21 & 0.013 & -0.54 & -0.088 & 0.11 & 0.16 & 0.16 & 0.13 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma \approx \begin{bmatrix} 125. & 0 & 0 \\ 0 & 4.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V \approx \begin{bmatrix} 0.018 & -0.41 & 0.91 \\ 0.13 & -0.90 & -0.41 \\ 0.99 & 0.13 & 0.038 \end{bmatrix}$$

Тогава

$$\Sigma^+ \approx \begin{bmatrix} 1/125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и умножавайки

$$A^+b = V\Sigma^+U^T$$

получаваме същия резултат като в пример 49.

### Какво друго ни дава SVD?

Приложенията на SVD далеч не се изчерпват с решаването на задачи по метода на НМК. Тук ще се спрем на следното:

- Едно много важно приложение на SVD е свързано с намаляване размерността на даден модел или задача, в т.ч. компресия на данни, изображения и др. Идеята е следната. Използвайки умножение стълб по ред, можем да напишем

$$A = \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + \mathbf{u}_r\sigma_r\mathbf{v}_r^T.$$

Сега, ако сингулярните стойности са подредени в низходящ ред, тогава можем да запазим само най-големите  $s$  от тях и да получим приближение от по-нисък ред:

$$A \approx \mathbf{u}_1\sigma_1\mathbf{v}_1^T + \cdots + \mathbf{u}_s\sigma_s\mathbf{v}_s^T.$$

**Пример 51.** Да разгледаме матрицата

$$A = \begin{bmatrix} 40 & -4 & -1 \\ -50 & 70 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Като използваме Mathematica, получаваме нейната декомпозиция по сингулярни стойности:

$$A \approx \begin{bmatrix} -0.33 & -0.94 & -0.02 \\ 0.94 & -0.33 & -0.02 \\ 0.01 & -0.02 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 90.5 & 0. & 0. \\ 0. & 28.8 & 0. \\ 0. & 0. & 0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.67 & -0.74 & 0.03 \\ 0.75 & -0.67 & 0.02 \\ 0.004 & 0.03 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Ако пренебрегнем най-малката сингулярна стойност и вместо нея поставим 0, като умножим обратно трите матрици, получаваме

$$\begin{bmatrix} 40. & -3.99999 & -0.999631 \\ -50. & 70. & 0.000295231 \\ -0.000516673 & 0.999631 & -0.0191981 \end{bmatrix},$$

което е доста добро приближение на оригиналната матрица.

В практиката се работи с големи матрици, много от сингулярните стойности на които често са много малки. Тяхното пренебрегване позволява запазването на компресирани данни с малка загуба на информация.

- SVD дава информация за обусловеността на матрицата  $A$ . Широко използвана дефиниция за число на обусловеност е следната:

$$\text{cond}(A) = \sigma_1/\sigma_n.$$

- SVD съдържа информация за базисите на четирите основни подпространства, свързани с  $A$ .

**Задача.** Потърсете информация в интернет за приложенията на SVD.

## Част II

# Теоретични основи на индустриалната математика - част 2



## Глава 3

# Задачи за параметрична идентификация

Както отбелязахме, на практика във всеки математически модел има параметри – величини, които характеризират материала, средата и т.н., например проводимост, плътност, вискозитет и др. Някои от тях могат да бъдат измерени директно, но други – не. Те се определят непряко, на база на резултата от тяхното действие. С други думи се решава **обратна задача** – по дадени резултати (например стойности на дадена функция), да се определят параметрите, които съответстват на тези резултати. Впрочем понякога тези параметри сами по себе си представляват интерес и са цел на разглеждането на даден математически модел. И така, ще формулираме общата задача за параметрична идентификация. Нека  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  е функция, зависеща от параметрите  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^p$  (ще записваме  $f = f(\mathbf{x}; \mathbf{p})$ ). Нека са дадени наблюденията (например данни от измервания)  $(\mathbf{x}_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, s}$ . Търсим  $\mathbf{p}^*$  така, че нормата  $\|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|$  да е минимална, където

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}) = (f(\mathbf{x}_1; \mathbf{p}) - y_1, \dots, f(\mathbf{x}_s; \mathbf{p}) - y_s)^T.$$

Ще записваме

$$\mathbf{p}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} \|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|. \quad (3.1)$$

*Забележка.* Да обърнем внимание, че никъде не сме предположили, че функцията  $f$  е аналитично зададена. Тя може да бъде зададена например като решението на дадено диференциално уравнение, като алгоритъм за пресмятане на стойности по подадени аргументи, например чрез невронна мрежа и др.

*Забележка.* Дефинирахме  $f$  да бъде скаларна функция, за да не утежняваме излишно изложението, но нищо пречи тя да бъде и векторна функция. Ще дадем примери по-късно за това.

### 3.1 Нелинейни задачи за най-малки квадрати

Ако в задачата (3.1) работим в  $\|\cdot\|_2$ -норма, получаваме задача за най-малки квадрати, т.е. общата задача за най-малки квадрати е

$$\mathbf{p}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} \|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|_2^2. \quad (3.2)$$

В края на предишната част на курса ние разгледахме въпроса за решаването на линейни задачи по метода най-малките квадрати. Разбира се, в голяма част от моделите, срещани в практиката, се налага определянето на параметри, които участват нелинейно в модела. Ето защо сега ще коментираме как можем да подходим в този случай. Нека обаче първо илюстрираме казаното дотук с един пример.

**Пример 52.** Да разгледаме въпроса за определянето на параметрите  $r$ ,  $x_0$  и  $K$  в логистичната функция

$$f(t) = \frac{x_0}{(1 - x_0/K)e^{-rt} + x_0/K}$$

по дадени следните наблюдения

t	0	1	2	3	4	5	6	7
f	0.04	0.35	1.05	1.9	1.98	1.97	1.99	1.999

Векторът от остатъците в този случай е

$$\mathbf{r}(\mathbf{p}) = (f(0) - 0.04, f(1) - 0.35, f(2) - 1.05, \dots, f(7) - 1.999)^T$$

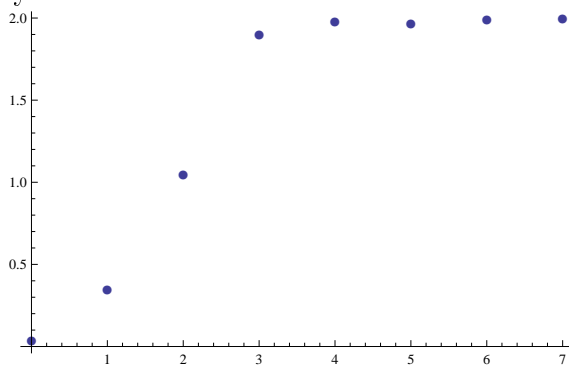
и зависи нелинейно от параметрите  $\mathbf{p} := (r, x_0, K)^T$ .

Дефинираме следната функция в Mathematica:

```
In[5]:= f[t_] =  $\frac{x_0}{(1 - x_0/k) E^{-r t} + x_0/k}$ ;
resid[r_, x0_, k_] =
f[Range[0, 7, 1]] - {0.04, 0.35, 1.05, 1.9, 1.98, 1.97, 1.99, 1.999}

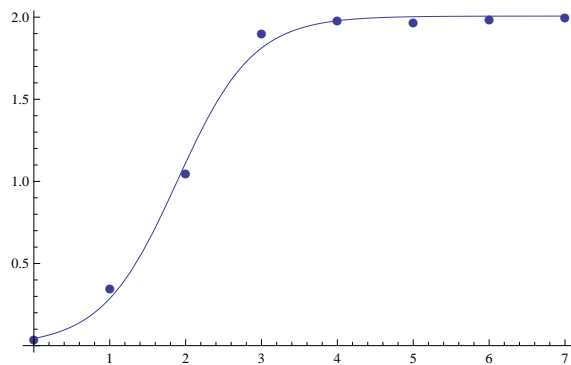
Out[6]:=  $\left\{ -0.04 + x_0, -0.35 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{k} + e^{-r} \left(1 - \frac{x_0}{k}\right)}, -1.05 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{k} + e^{-2r} \left(1 - \frac{x_0}{k}\right)}, \right.$ 
 $-1.9 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{k} + e^{-3r} \left(1 - \frac{x_0}{k}\right)}, -1.98 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{k} + e^{-4r} \left(1 - \frac{x_0}{k}\right)}, -1.97 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{k} + e^{-5r} \left(1 - \frac{x_0}{k}\right)},$ 
 $\left. -1.99 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{k} + e^{-6r} \left(1 - \frac{x_0}{k}\right)}, -1.999 + \frac{x_0}{\frac{x_0}{k} + e^{-7r} \left(1 - \frac{x_0}{k}\right)} \right\}$ 
```

Задачата ни е да определим  $\mathbf{p}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} \|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|_2^2$ , като по този начин искаме логистичната крива да минава възможно най-близо до точките, изобразени по-долу:



Решавайки тази минимизационна задача (въпрос, който ще коментираме в следващите параграфи), получаваме добро съответствие с експерименталните данни:





## 3.2 Числени методи за нелинейни задачи за най-малки квадрати

Задачата (3.2) е частен случай на нелинейна минимизационна задача. Затова ние като начало ще разгледаме общата идея на методи за численото решаване на минимизационни задачи, като някои от тях ще са пригодени специално за задачи за най-малки квадрати. Нека разгледаме общата минимизационна задача

$$\mathbf{p}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{p}} F(\mathbf{p}), \quad (3.3)$$

където  $F: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  е дадена **целева функция**. Като правило числените методи за решаване на нелинейни задачи са итерационни. В случая, започвайки от дадено начално предположение  $\mathbf{p}_0$ , построяваме редицата

$$\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots$$

която искаме да бъде сходяща към (локален) минимум  $\mathbf{p}^*$  на  $F(\mathbf{p})$ . При това ние ще разгледаме методи на спускане (англ. Descent Methods), т.е. ще искаме

$$F(\mathbf{p}_{k+1}) < F(\mathbf{p}_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

На практика последващи приближения се правят, докато не бъде изпълнено едно от следните две условия:

- Не бъде преминал отнапред зададен максимален брой итерации (разходимост);
- Не бъде достигнато условие за сходимост – за задачи за най-малки квадрати може да бъде използвано  $\|\mathbf{r}(\mathbf{p}_k)\|_2 < tol$ , където  $tol$  е отнапред зададен толеранс. За по-общи условия за сходимост виж стр. 11 от [5].

### N.B. 28

Не съществува общ подход за избора на начално предположение  $\mathbf{p}_0$  и този въпрос не е никак тривиален. За всяка задача трябва да се мисли конкретно и изборът да се направи на базата на различни евристични съображения, а често в реални задачи и на принципа “проба–грешка” (за последното може да се използва и по-систематичен подход).

**За много добро интуитивно обяснение на идеята на тези алгоритми, прочети Пример 2.2 на стр. 10 в [5]!**

От цитирания пример е ясно, че на всяка итерация (от  $\mathbf{p}_k$  да преминем към  $\mathbf{p}_{k+1}$ ), е необходимо да направим две неща:

- Да определим посока, в която да се движим;
- Да определим колко да се придвижим в тази посока.

Ще разгледаме два основни подхода за реализиране на тази идея – линейно търсене (англ. Line Search) и търсене в доверителна област (англ. Trust Region).

### 3.2.1 Методи с линейно търсене

При тази стратегия първо избираме посоката  $\mathbf{h}$  на намаляване, след което избираме стъпка  $\alpha$  така, че  $F(\mathbf{p}_k + \alpha\mathbf{h}) < F(\mathbf{p}_k)$ .

Най-простият начин за избора на  $\alpha$  е да вземем най-голямото число от редицата  $1, 1/2, 1/4, \dots$ , за което  $F(\mathbf{p}_k + \alpha\mathbf{h}) < F(\mathbf{p}_k)$ . Съществуват по-добри подходи за избор на стъпката, върху които няма да се спираме. Повече информация може да бъде намерена на стр. 15–16 в [5]. Тук с информативна цел ще приведем само един друг критерий, който често се използва на практика, като ще го формулираме конкретно за задачи за най-малки квадрати – избираме  $\alpha$  да бъде най-голямото число от редицата  $1, 1/2, 1/4, \dots$ , за което

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{p}_k)\|_2^2 - \|\mathbf{r}(\mathbf{p}_k + \alpha\mathbf{h})\|_2^2 \geq \frac{1}{2}\alpha\|J(\mathbf{p}_k)\mathbf{h}\|_2^2.$$

Последното е известно в литературата като условие на Armijo–Goldstein.

И така, остава да изясним как да избираме посоката  $\mathbf{h}$ . Ще разгледаме три варианта, които водят до три класически метода. Последният от тях (методът на Гаус–Нютон) е конкретно за задачи за най-малки квадрати и следва да му бъде обърнато специално внимание. Ние ще ги разгледаме последователно.

#### Метод на най-бързото спускане

Методът на най-бързото спускане (англ. Steepest Descent) е свързан с най-интуитивният избор за посока:

$$\mathbf{h}^{SD} := -\nabla F(\mathbf{p}_k).$$

Вземайки предвид това, алгоритъмът добива следния вид:

- Започваме с начално приближение  $\mathbf{p}_0$  и  $k = 0$ ;
- Докато не е изпълнен stop-критерий:
  - Пресмятаме  $\mathbf{h}^{SD} = -\nabla F(\mathbf{p}_k)$ ;
  - Избираме  $\alpha = 1, 1/2, 1/4, \dots$  така, че  $F(\mathbf{p}_k + \alpha\mathbf{h}^{SD}) < F(\mathbf{p}_k)$ ;
  - Намираме  $\mathbf{p}_{k+1} := \mathbf{p}_k + \alpha\mathbf{h}^{SD}$ ;
  - Увеличаваме  $k := k + 1$ .

### Метод на Нютон

Методът на Нютон търси посоката  $\mathbf{h}$  на  $k$ -тата итерация, като се основава на идеята, че в локален минимум  $\mathbf{p}$  е изпълнено необходимото условие

$$\nabla F(\mathbf{p}) = 0.$$

Последното е една нелинейна алгебрична система, към която можем да подходим с метода на Нютон, като линеаризираме лявата страна около точката  $\mathbf{p}_k$ . Така получаваме линеаризираната алгебрична система (проверете!)

$$H(\mathbf{p}_k)h^N = -\nabla F(\mathbf{p}_k),$$

където  $h^N := \mathbf{p} - \mathbf{p}_k$  е посоката, в която трябва да обновим  $\mathbf{p}_k$ , а  $H(\mathbf{p}_k)$  е хесианът на  $F$ , т.е.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_p \partial p_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial p_p^2} \end{bmatrix},$$

пресметнат в точката  $\mathbf{p}_k$ .

Тогава методът на Нютон с линейно търсене добива вида

- Започваме с начално приближение  $\mathbf{p}_0$  и  $k = 0$ ;
- Докато не е изпълнен stop-критерий:
  - Пресмятаме  $\mathbf{h}^N$  като решение на линейната алгебрична система

$$H(\mathbf{p}_k)h^N = -\nabla F(\mathbf{p}_k);$$

- Избираме  $\alpha = 1, 1/2, 1/4, \dots$  така, че  $F(\mathbf{p}_k + \alpha \mathbf{h}^N) < F(\mathbf{p}_k)$ ;
- Намираме  $\mathbf{p}_{k+1} := \mathbf{p}_k + \alpha \mathbf{h}^N$ ;
- Увеличаваме  $k := k+1$ .

### Метод на Гаус–Нютон

Предишните два метода, които разгледахме, са общи и не използват структурата на задачата за най-малки квадрати, решението на която е основна наша цел към този момент. Методът на Гаус–Нютон я използва, което го прави особено подходящ за решаването на такива задачи (и е специализиран именно за тях). При него изборът на посока се осъществява, като работим директно със задачата (3.2) и на  $k$ -тата итерация я линеаризираме около точката  $\mathbf{p}_k$ , т.е. решим задачата

$$\mathbf{h}^{GN} = \operatorname{argmin}_h \|\mathbf{r}(\mathbf{p}_k) + J(\mathbf{p}_k)\mathbf{h}\|, \quad (3.4)$$

където  $h := \mathbf{p} - \mathbf{p}_k$ . Последната задача е всъщност линейната задача за най-малки квадрати

$$J(\mathbf{p}_k)\mathbf{h}^{GN} = -\mathbf{r}(\mathbf{p}_k),$$

която вече знаем как да решим. Методът на Гаус–Нютон има следния алгоритъм:

- Започваме с начално приближение  $\mathbf{p}_0$  и  $k = 0$ ;
- Докато не е изпълнен stop-критерий:
  - Пресмятаме  $\mathbf{h}^{GN}$  като решение на линейната алгебрична система
 
$$J(\mathbf{p}_k)\mathbf{h}^{GN} = -\mathbf{r}(\mathbf{p}_k);$$
  - Избираме  $\alpha = 1, 1/2, 1/4, \dots$  така, че  $\|\mathbf{r}(\mathbf{p}_k + \alpha\mathbf{h}^{GN})\|_2 < \|\mathbf{r}(\mathbf{p}_k)\|_2$ ;
  - Намираме  $\mathbf{p}_{k+1} := \mathbf{p}_k + \alpha\mathbf{h}^{GN}$ ;
  - Увеличаваме  $k := k+1$ .

### 3.2.2 Сравнение на методите с линейно търсене

В настоящия параграф ще направим сравнение на методите, разгледани до тук, на базата на конкретен пример. В същото време и ще илюстрираме как методите могат да се приложат за параметричната идентификация в случая, когато моделът е аналитично зададена функция. Реализацията на трите метода е приложена във файла *[TOIM2]Lecture2.nb* Тук ще обобщим резултатите от числените експерименти.

Първият основен въпрос е свързан със сходимостта на методите. Въвеждаме следните понятия във връзка със скоростта на сходност.

#### Дефиниция 22

Нека  $\mathbf{e}_k := \mathbf{p}_k - \mathbf{p}^*$ . Казваме, че даден метод има **линейна сходност**, ако за достатъчно малки  $\|\mathbf{e}_k\|$  е в сила

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| \leq C\|\mathbf{e}_k\|$$

за някое  $0 < C < 1$ . Казваме, че методът има **квадратична сходност**, ако за достатъчно малки  $\|\mathbf{e}_k\|$  е в сила

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\| = O(\|\mathbf{e}_k\|^2).$$

Казваме, че методът има **суперлинейна сходност**, ако

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{e}_{k+1}\|}{\|\mathbf{e}_k\|} = 0.$$

Нека първо сравним за колко итерации сходят методите на Gauss–Newton и на най-бързото спускане с начално приближение  $\mathbf{p}_0 = (1, 1, 1)$ .

tol	Gauss–Newton	Steepest Descent
$10^{-8}$	16	7675
$10^{-5}$	12	2259
$10^{-2}$	7	29
$10^{-1}$	6	7

Виждаме, че за големи стойности на *tol* броят итерации при двата метода е сравним. Когато  $\|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|$  стане малко обаче, сходимостта на Gauss–Newton е

много бърза, докато най-бързото спускане е много бавно сходящ в близост до минимума. По принцип и двата метода имат линейна сходимост. Методът на Gauss–Newton обаче има суперлинейна (близка до квадратична) сходимост в близост до минимума. По-точно методът е бързо сходящ, когато:

- остатъкът  $\|\mathbf{r}(\mathbf{p})\|_2$  е малък или
- $\mathbf{r}(\mathbf{p})$  е слабо нелинейна, т.е.  $\|H(r_i)\|_2$  е малко, където  $H(r_i)$  е хесианът на  $i$ -тата компонента на  $\mathbf{r}$ .

На база на направените дотук наблюдения е естествено, че често се използват **хибридни методи**. Например в началото, когато сме далеч от минимума, може да се използва методът на най-бързото спускане, който е по-робастен и след това да се превключи на метод, който е по-бързо сходящ в близост до решението, например Gauss–Newton.

Методът на Нютон има квадратична сходимост в близост до минимума. Той обаче има два сериозни недостатъка. Първо, при него е необходимо пресмятането на хесиана, което може да бъде много времеемка операция. Освен това, ако началното приближение не е достатъчно близо до минимума, методът може да построи редица от последващи приближения, които се отдалечават от него. Това, разбира се, е в сила и за останалите методи, но за конкретния пример, който разглеждаме, методът на Нютон не сходя за начално приближение  $\mathbf{p}_0 = (1, 1, 1)$ . Ако изберем по-добро начално приближение обаче (например получено с няколко итерации по метода на най-бързото спускане), методът е по-бързо сходящ и от този на Gauss–Newton, и от този на най-бързото спускане.

### 3.2.3 Методи с търсене в доверителна област

Методът на Gauss–Newton често дава много добри резултати на практика за решаването на нелинейни задачи за НМК. Когато обаче на някоя итерация  $J$  няма пълен ранг по стълбове или стълбовете са почти линейно-зависими, то методът може да има проблеми да продължи. В този случай добър резултат дават методите, основаващи се на търсене в доверителна област.

**За общата идея на тези методи прочети параграф 2.4. в [13] до формули (2.20) включително.**

Ние ще разгледаме конкретно метода на Levenberg–Marquardt, който е специализиран за задачи за НМК. При него модифицираме задачата (3.4), съгласно идеята на методите за търсене в доверителна област, и на  $k$ -тата итерация решаваме задачата

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{LM} &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{h}} (\|\mathbf{r}(\mathbf{p}_k) + J(\mathbf{p}_k)\mathbf{h}\|_2^2 + \mu\|\mathbf{h}\|_2^2) \\ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{h}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\mathbf{p}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J(\mathbf{p}) \\ \sqrt{\mu}I \end{bmatrix} \mathbf{h} \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Тогава, на  $k$ -тата итерация, ако използваме например нормалните уравнения, ще трябва да решим системата

$$(J^T J + \mu I)\mathbf{h}^{GN} = -J^T \mathbf{r}.$$

Методът на Levenberg–Marquardt решава проблемите, които коментирахме при Gauss–Newton, тъй като матрицата  $J^T J + \mu I$  има винаги пълен ранг

и е положително-определена. Нещо повече, при малки стойности на  $\mu$ ,  $\mathbf{h}^{LM}$  е почти същата като  $\mathbf{h}^{GN}$ , което гарантира бърза сходимост в близост до минимума. При големи стойности на  $\mu$ , методът на практика прави малка стъпка в посоката  $\mathbf{h}^{SD}$ . С други думи, методът на Levenberg–Marquardt автоматично комбинира идеята, която коментирахме в края на предходния параграф.

Ще илюстрираме метода, като го приложим за определяне на параметрите в логистичната крива – примерът, който използваме до момента (вж. файла `[TOIM2]Lec3.nb`).

### 3.3 Параметрична идентификация в модели, описвани с диференциални уравнения

ще изложим идеята върху прост пример. Други примери ще бъдат разгледани на практикума.

Разглеждаме логистичното уравнение (чието решение всъщност е логистичната функция, която взехме за пример в предходен параграф):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx(1 - x/K), \\ x(0) &= x_0.\end{aligned}$$

Да видим как можем да оценим параметрите, като използваме същите данни като преди, но този път няма да използваме експлицитния вид на  $x(t)$ . Това ще бъде необходимо в повечето задачи за параметрична идентификация в модели, описвани с ДУ, тъй като аналитични решения съществуват рядко.

Идеята остава непроменена. Този път обаче трябва да дефинираме  $\mathbf{r}(\mathbf{p})$  малко по-абстрактно. Това може да стане, като имплементираме алгоритъм, който приема стойности на параметрите  $\mathbf{p}$ , решава ОДУ и тогава пресмята  $\mathbf{r}(\mathbf{p})$ :

```
In[1]:= resid[r_, x0_, k_] := (
  xRes[t_] =
    x[t] /. NDSolve[{x'[t] == r x[t] (1 - x[t] / k), x[0] == x0}, x, {t, 0, 10}][[1]]
  xRes[Range[0, 7, 1]] - {0.04, 0.35, 1.05, 1.9, 1.98, 1.97, 1.99, 1.999}
)
```

В последното използвахме вградената в Mathematica функция `NDSolve`, но бихме могли лесно да използваме и някой от известните методи за решаване на ОДУ, напр. Runge–Kutta, Adams–Bashforth, и т.н. и след това да интерполираме в точките, за които имаме известни данни.

Сега, тъй като имаме функция, която пресмята вектора от остатъците можем да пресметнем матрицата на Якоби за дадени стойности на  $\mathbf{p}$  чрез числено диференциране:

```
In[11]:= J[r_, x0_, k_] := (
  ε = 0.0001;
  Table[{
    
$$\frac{\text{resid}[r + \epsilon, x0, k][[i]] - \text{resid}[r - \epsilon, x0, k][[i]]}{2 \epsilon},$$

    
$$\frac{\text{resid}[r, x0 + \epsilon, k][[i]] - \text{resid}[r, x0 - \epsilon, k][[i]]}{2 \epsilon},$$

    
$$\frac{\text{resid}[r, x0, k + \epsilon][[i]] - \text{resid}[r, x0, k - \epsilon][[i]]}{2 \epsilon}
  ], {i, 1, 8}]
)$$

```

Самият метод на Гаус-Нютон остава непроменен:

```
In[18]:= pOld = {10, 10, 10};
pNew = {0.5, 0.5, 0.5};
tol = 0.001;
While[Norm[pOld - pNew] > tol,
  pOld = pNew;
  Δp = LeastSquares[J[pOld[[1]], pOld[[2]], pOld[[3]]],
    -resid[pOld[[1]], pOld[[2]], pOld[[3]]]];
  α = 1;
  pNew = pOld + α Δp;
  While[Norm[resid[pNew[[1]], pNew[[2]], pNew[[3]]], 2] >
    Norm[resid[pOld[[1]], pOld[[2]], pOld[[3]]], 2],
    α /= 2;
    pNew = pOld + α Δp
  ]
]
pNew
```

```
Out[22]= {2.01064, 0.0437801, 2.00656}
```

Получихме същия резултат като преди.

Обърнете внимание, че представената идея може тривиално да се обобщи за ЧДУ и др., тъй като единствено е необходимо да имплементираме функция, която пресмята  $\mathbf{r}(\mathbf{p})$ , а  $J(\mathbf{p})$  може да бъде апроксимирана, като се използва имплементираната функция.





## Глава 4

# Математически модели, описвани със системи ОДУ

### 4.1 Задачата на Коши за ОДУ като математически модел

Най-общо разглеждаме задачата на Коши за ОДУ от първи ред

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}}{dt} &= f(t, \mathbf{u}(t)), \quad t \in (t_0, +\infty), \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

където  $\mathbf{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  е търсената функция (зависима променлива), а  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Разбира се, можем да разглеждаме и други задачи, например законът на Нютон

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m},$$

което е уравнение от втори ред. Последното обаче може да се приведе във вида (4.1) чрез полагане:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{F(t)}{m}.\end{aligned}$$

Естествено е да разглеждаме ОДУ като математически модели на реални процеси в следните случаи:

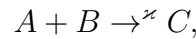
- Процеси, зависещи само от времето (когато разглежданата величина е разпределена хомогенно в пространството, при наличие на радиална симетрия и др.);
- 1D стационарни процеси и др.

Ще разгледаме няколко примера, които ще ни дадат обща представа за тези случаи.

**Пример 53.** Прилагане на закон за запазване за хомогенни процеси.

- Реакционни схеми

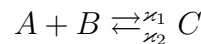
Използвайки закона за запазване на масата можем да моделираме концентрациите на три вещества, свързани от следната реакционна схема:



със системата ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\kappa AB, \\ \frac{dB}{dt} &= -\kappa AB, \quad \frac{dC}{dt} = \kappa AB. \end{aligned}$$

Реакционната схема



се описва съответно от системата ОДУ

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\kappa_1 AB + \kappa_2 C, \\ \frac{dB}{dt} &= -\kappa_1 AB + \kappa_2 C, \\ \frac{dC}{dt} &= \kappa_1 AB - \kappa_2 C. \end{aligned}$$

- Вход/изход

Нека разглеждаме реактор (резервоар/езеро и т.н.) с обем  $V$  l и нека вливаме течност със скорост  $D_{in}$  l/min, в която има вещество с концентрация  $c_{in}$  mg/l. От реактора има изход със скорост  $D_{out}$  l/min.

Тогава законът за запаване на масата дава следната връзка:

$$\frac{d(Vc)}{dt} = D_{in}c_{in} - D_{out}c.$$

Последното уравнение може да се обезразмери и да се запише като уравнение на  $c(t)$ .

- Задачи от популационната динамика

– Нека приемем, че реакторът от последния пример е биореактор, в който се отглеждат микроорганизми с концентрация в момента от време  $t$ , означена с  $x(t)$ . Нека вливаното вещество е субстратът с концентрация  $s(t)$ , с който се хранят организмите. Тогава можем да запишем следната система ОДУ, моделираща растежа на микроорганизмите:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= (s_{in} - s)D - F(s)x, \\ \frac{dx}{dt} &= \chi F(s)x - Dx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

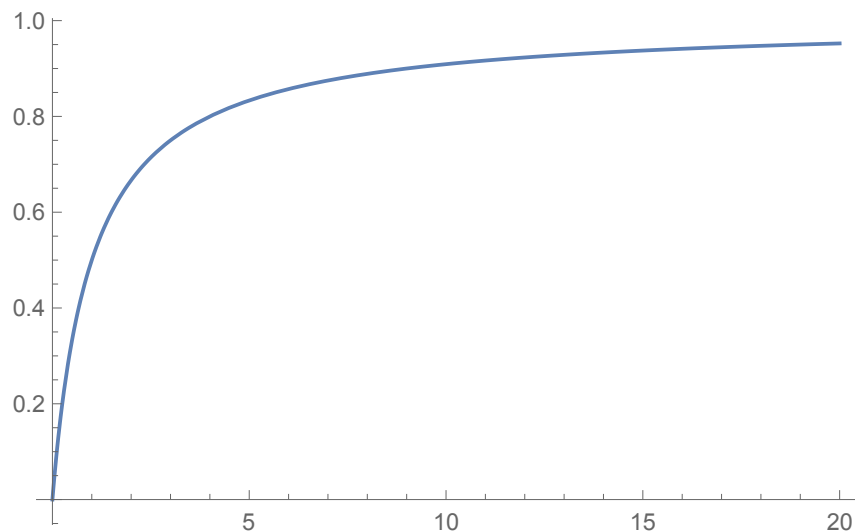
В последната система  $D := D_{in}/V = D_{out}/V$  е скоростта на вливане и изливане от биореактора. Функцията  $F(s)$  описва консумацията на

субстрат за единица от микроорганизмите, чийто растеж се приема да бъде пропорционален на консумацията. В литературата съществуват над 30 вида, за функцията  $F(s)$ , въведени на базата на експериментални сведения, които описват различни ситуации. Ще приведем две класически:

\* Функция на Моно (Monod):

$$F(s) = \frac{as}{b+s},$$

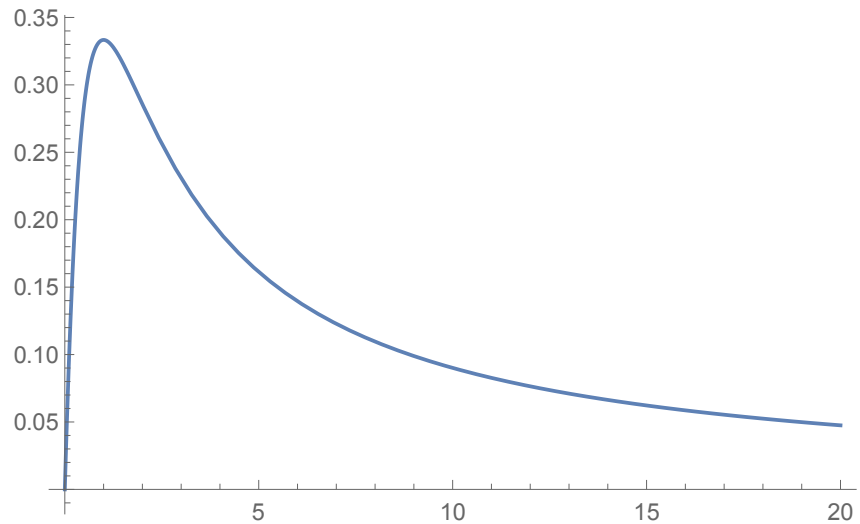
където  $a$  и  $b$  са положителни константи. Функцията на Monod отразява идеята, че организмите не могат да консумират субстрата безкрайно бързо и за достатъчно високи концентрации  $s$  не би трябвало да има съществена разлика в консумацията. Поведението на функцията на Monod е илюстрирано по-долу за  $a = b = 1$ :



\* Функция на Haldane:

$$F(s) = \frac{as}{b+s+cs^2},$$

където  $a$ ,  $b$  и  $c$  са положителни константи. Тази функция се използва в случаите, когато наличието на високи концентрации на субстрат имат инхибиращо действие върху организмите. Примерна графика на функцията на Haldane е приведена по-долу за  $a = b = c = 1$ :



- Класическият модел, описващ взаимодействието на две популации (нека си мислим, хищник и жертва) е моделът на Lotka–Volterra. Ако с  $N(t)$  и  $P(t)$  означим численостите (плътностите, концентрациите) на жертвата и хищника в момента от време  $t$ , моделът има вида:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN - bNP, \\ \frac{dP}{dt} &= \chi bNP - dP.\end{aligned}$$

Той се основава на следните четири предположения. В отсъствието на хищници растежа на жертвата се приема да бъде експоненциален. Консумацията на жертви на единица хищник е пропорционална на броя на жертвите. Растежът на хищника е пропорционален на консумацията. Смъртността на единица хищник е константа.

Една модификация, предложена от Rosenzweig и MacArthur дава основния вид на моделите от този тип, който се изследва в литературата:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - F(N)P, \\ \frac{dP}{dt} &= \chi F(N)P - dP.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Тя се основава на предположение за логистичен растеж на жертвата в отсъствието на хищници и въвеждането на функция  $F(N)$ , която описва консумацията. В класическия модел на Rosenzweig–MacArthur се избира функцията на Monod (тук тя се нарича функция на Holling от тип II).

**Пример 54.** Закони на физиката:

- Законът на Нютон

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}$$

определя движението на материална частица с маса  $m$  в пространството под действието на сила  $F(t)$ . В зависимост от

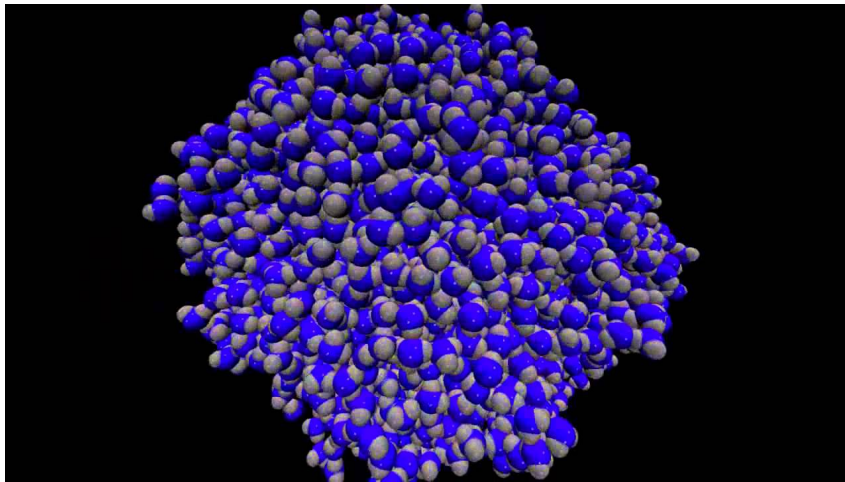
- Позицията на масата в система от пружина-маса, като пренебрегваме съпротивлението на въздуха, е

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{kx}{m}.$$

- Точка се движи в силово поле  $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . Тогава нейната траектория се описва от уравнението

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

- Законът на Нютон позволява описването и на системи от много частици. Такива модели разглежда например молекулярната динамика.



Вж. за повече информация [https://en.wikipedia.org/wiki/Molecular\\_dynamics](https://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_dynamics)

- Електричество Основните величини се дефинират посредством производни. Например токът се дефинира като заряда  $Q$ , преминаващ през дадено напречно сечение за единица време:

$$I := \frac{dQ}{dt}.$$

С други думи е естествено моделите на електрични явления да са диференциални уравнения.

- Теплопроводност

Класически закони, описвани топлообмен между тяло с температура  $T(t)$  и околната среда, която има температура  $T_{out}$ , са следните:

- Закон на Нютон

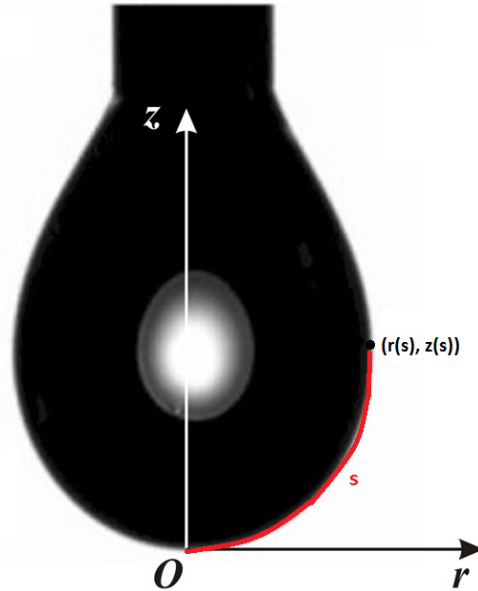
$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{out});$$

- Закон на Стефан-Болцман, който описва топлопленос вследствие на радиация:

$$\frac{dT}{dt} = k(T^4 - T_{out}^4).$$

**Пример 55.** Описване на формата на дълъг и тънък обект (в стационарно състояние).

- Формата на осево-симетрична капка в стационарно състояние се описва като параметрична крива  $(r(s), z(s))$ , където  $s$  е естественият параметър на кривата – дължината по кривата, измерена от върха на капката:



Въвеждайки ъгъла  $\theta$ , който допирателната в съответната точка сключва с положителната посока на абсцисната ос, формулираме системата

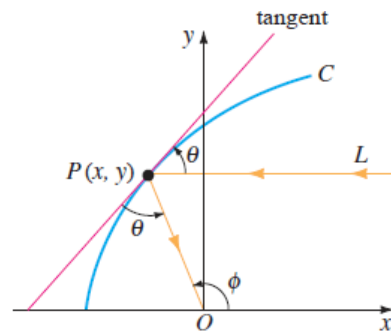
$$\begin{aligned}\frac{dr}{ds} &= \cos \theta, \\ \frac{dz}{ds} &= \sin \theta, \\ \frac{d\theta}{ds} &= 2b + cz - \frac{\sin \theta}{r},\end{aligned}$$

където  $b$  е радиусът на кривина във върха на капката, а  $c$  е физичен параметър, свързан с повърхностното напрежение. Първите две уравнения отразяват изцяло геометрични съображения. Ако ги разделим почленно, ще получим  $dz/dr = \tan \theta$ . Третото уравнение се базира на физични закони. Идеята му е, че, за да бъде капката в спокойно състояние, трябва резултантната сила във всяка точка да е 0.

Формата  $y(x)$  на сателитна антена, чиято цел е да събира всички лъчи, успоредни на абсцисата, в началото на координатната система, се определя от

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

Последното може да се изведе на базата на геометрични съборжения, като се използва следната фигура и фактът, че  $\varphi = 2\theta$  (Проверете!)



**Пример 56.** Стационарно състояние на 1D процес. Да разгледаме линейното едномерно уравнение на дифузията

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f.$$

Стационарните му решения трябва да удовлетворяват

$$-u'' = f.$$

Да обърнем внимание, че тук моделът е **гранична задача** за ОДУ от втори ред.

### N.B. 29

ОДУ се получават при прилагането на физични закони (в т.ч. закони за запазване, закон на Нютон, закони в електричеството и т.н.), на базата на евристични и емпирични съображения (логистичен модел, модели в популационната динамика и др.), от геометрични задачи и т.н.

Много често ОДУ дават първо приближение на разглеждания процес, при пренебрегване на едно или повече пространствени измерения. В по-сложните модели, описвани с ЧДУ, десните страни в съответните ОДУ (получени при предположението за хомогенност на средата), могат да участват като някакви членове, например като реакционни членове в уравнения от тип реакция-дифузия. Изследването на поведението на решенията на съответните ОДУ в този случай също е от съществена важност, защото позволява да се направят заключения за поведението на решенията на ЧДУ и/или да се добие интуиция за локалното поведение на процеса (в някакъв смисъл, в една конкретна точка от непрекъснатата среда).

## 4.2 Автономни системи. Равновесни точки и устойчивост. Векторни полета и фазови портрети. Линейни автономни системи.

Както можем да забележим в предходната секция, десните страни в много от моделите зависят само от търсените функции, но не и от експлицитно от независимите променливи. Това е естествено, тъй като в много случаи настоящото състояние на физическата система определя бъдещото ѝ развитие.

Системи от вида

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (4.4)$$

т.е. при които в дясната страна независимата променлива  $t$  не участва експлицитно, се наричат **автономни системи**. Ние ще започнем изучаването на ОДУ оттук.

### Дефиниция 23

Множеството от всички стойности, които  $\mathbf{u}$  може да приема се нарича **фазово пространство**.

### Дефиниция 24

Проекцията на дадено решение върху фазовото пространство се нарича **траектория**. С други думи, траекториите са кривите във фазовото пространство, параметризирани по отношение на  $t$  и съответстващи на решенията  $\mathbf{u}(t)$  на (4.4).

Можем да отбележим също, че всяка неавтономна система

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad t > t_0, \\ \mathbf{u}(t_0) &= \mathbf{u}_0. \end{aligned}$$

може да бъде записана като автономна:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{ds} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad s > 0 \\ \frac{dt}{ds} &= 1, \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0, \quad t(0) = t_0. \end{aligned}$$

### N.B. 30

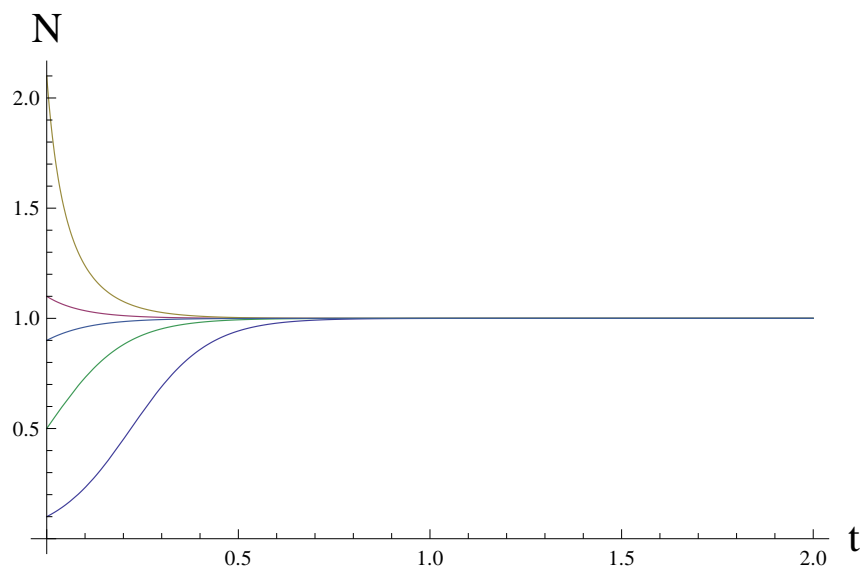
Съществуват два основни подхода при изследването на даден математически модел – да го решим числено (за конкретни стойности на параметрите в модела) или да изучим по-общо свойствата на решенията. Първият подход е основна тема в магистърската програма. Ние сега ще се занимаем с втория. Когато говорим за **качествено изследване** на дадена динамична система, ние обикновено имаме предвид да определим **асимптотиката на решенията** т.е. на какво “приличат” те в даден интервал от време (често при  $t \rightarrow \infty$ ). Това ни дава информация какво ще се случи с моделираната система като резултат (след достатъчно дълъг период от време).

**Пример 57.** Да разгледаме за пример логистичното уравнение

$$\frac{du}{dt} = ru(1 - u/K), \quad (4.5)$$

чиито решения за различни начални условия са визуализирани на следната фигура:



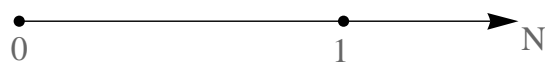


Асимптотиката на всички решения с положителни начални условия е, че те клонят към 1. С други думи, след достатъчно дълго време, популацията ще достигне максималната си численост.

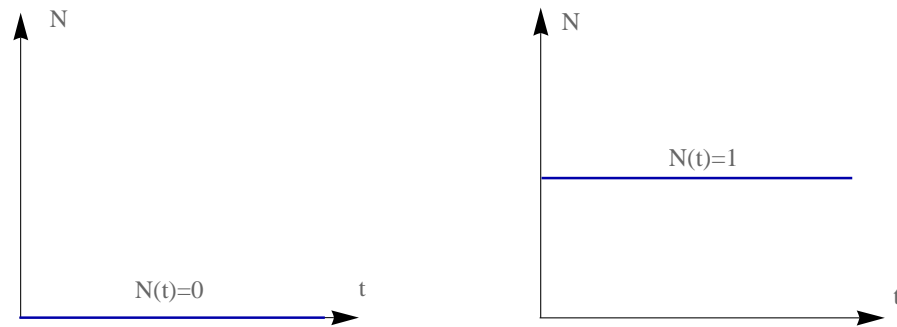
### Дефиниция 25

Най-простите решения на (4.4) са **равновесните точки**, т.е. точки  $E \in \mathbb{R}^n$ , за които  $\mathbf{f}(E) = \mathbf{0}$ .

**Пример 58.** Уравнението (4.5) има две равновесни точки  $u = 0$  и  $u = 1$ . Във фазовото пространство (в случая положителната полуос) те изглеждат така:



Те съответстват на константни решения:



Известно е, че (в някакъв смисъл) “интересното” динамично поведение на дадена автономна система се случва в околност на равновесни точки, както ще видим на базата на някои примери в следващите параграфи.

Друг важен пример за прости решения са периодичните решения. На тях съответстват периодични траектории във фазовото пространство.

### Дефиниция 26

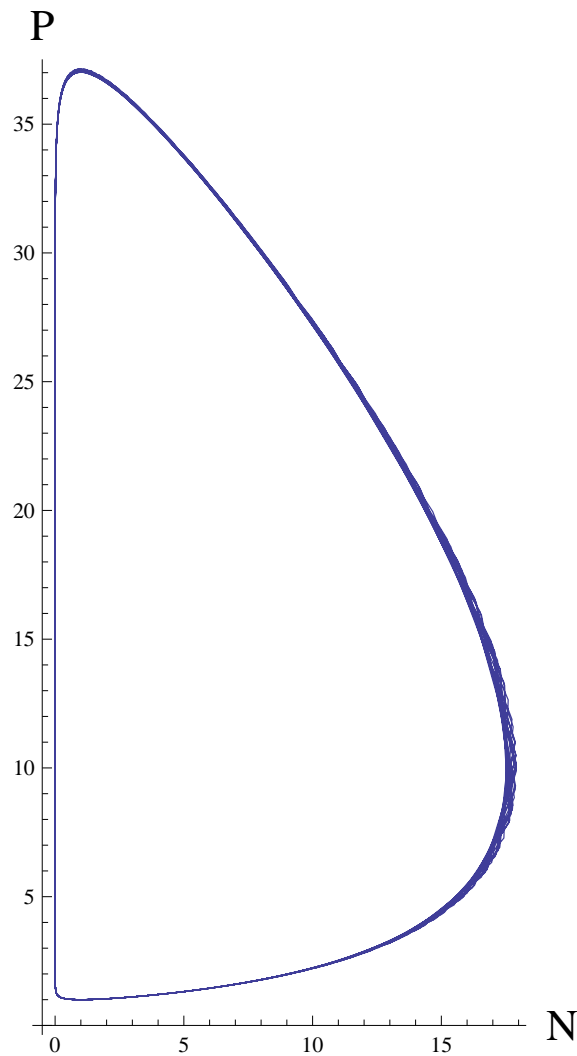
Траекторията  $\gamma(t)$  се нарича **периодична траектория** или **периодична орбита**, ако  $\gamma(t + T) = \gamma(t)$  за всяко  $t > 0$  и фиксирано  $T$ .

**Пример 59.** Да разгледаме модел на Lotka–Volterra

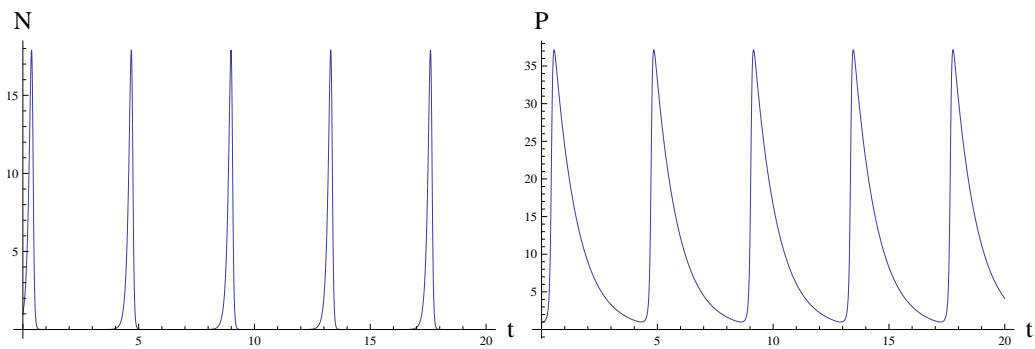
$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= 10N(1 - N) - NP, \\ \frac{dP}{dt} &= NP - P.\end{aligned}$$

Фазовото пространство в случая е  $\mathbb{R}^2$ , по-точно положителният квадрант, тъй като  $N$  и  $P$  означават числености на популации от организми.

Една примерна траектория е визуализирана по-долу:



Последната съответства на периодични решения за  $N(t)$  и  $P(t)$ :

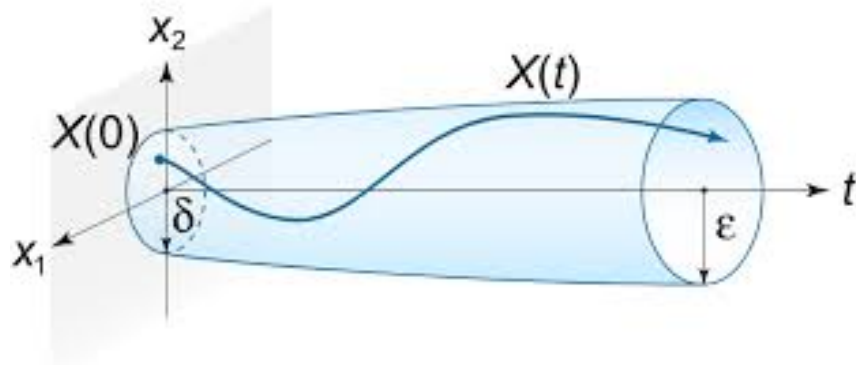


### Дефиниция 27

Решението  $u = u(t)$  на задачата на Коши се нарича **устойчиво по Ляпунов**, ако  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такава, че от  $|\tilde{u}_0 - u_0| < \delta$  следва  $|\tilde{u}(x) - u(x)| < \varepsilon$ , където  $\tilde{u}(x)$  е решението с начално условие  $\tilde{u}_0$ .

Казано с други думи, малки промени в началното условие не трябва да водят до големи промени в решението.

## Stability in the sense of Lyapunov



В частност дефинираме устойчивост на равновесна точка по следния начин.

**Дефиниция 28**

Казваме, че равновесната точка  $E$  е **устойчива по Ляпунов**, ако  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такава, че от  $|\tilde{u}_0 - E| < \delta$  следва  $|\gamma(t) - E| < \varepsilon$ , където  $\gamma(t)$  е траекторията, съответстваща на начално условие  $\tilde{u}_0$  от фазовото пространство.

За да изследваме устойчивостта на равновесните точки и динамиката на нелинеен модел обикновено линеаризираме системата в околност на равновесната точка. Следователно е добре първо да се запознаем с поведението на решенията на линейните системи.

Разглеждаме следната линейна автономна система:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}.$$

Тя може да бъде записана като

$$\left(\frac{d}{dt} - A\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Следователно решенията на последната система са в nullspace на линейния оператор  $\left(\frac{d}{dt} - A\right)$ . Знаем, че nullspace на даден линеен оператор е линейно пространство. Нещо повече, решенията на  $n$ -мерна система ОДУ са еднозначно определени от  $n$  начални условия и следователно размерността на това пространство  $n$ . Остава само да намерим базис, за да характеризираме решенията напълно.

Знаем, че най-хубавият базис на  $\mathbb{R}^n$ , свързан с оператора, описан от  $A$ , е собственият базис на  $A$ . Ще търсим решенията във вид на линейна комбинация на собствените вектори, за да използваме техните хубави свойства и изчисленията да бъдат по-лесни. Нека приемаме засега, че собствените стойности на  $A$  са реални и  $A$  има пълен набор от собствени вектори.

Може лесно да се провери, че

$$\mathbf{u}_i(t) = e^{\lambda_i t} \mathbf{x}_i,$$

където  $\lambda_i$  е съответната собствена стойност и решението на линейната система “в направление на  $\mathbf{x}_i$ ”.

**Твърдение 27**

Общото решение на линейната автономна система ОДУ

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = A\mathbf{u}$$

в случая на реални и различни собствени стойности е

$$\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{x}_n,$$

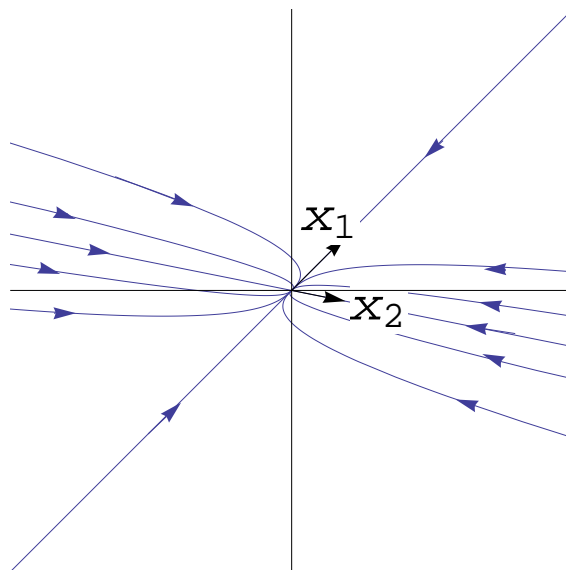
където  $c_i$  са произволни константи.

**Твърдение 28**

Единствената равновесна точка на линейната система е началото на координатната система. Вземайки предвид последното твърдение, тя е асимптотично устойчива, ако всички собствени стойности на  $A$  са отрицателни, и неустойчива, ако съществува положителна собствена стойност.

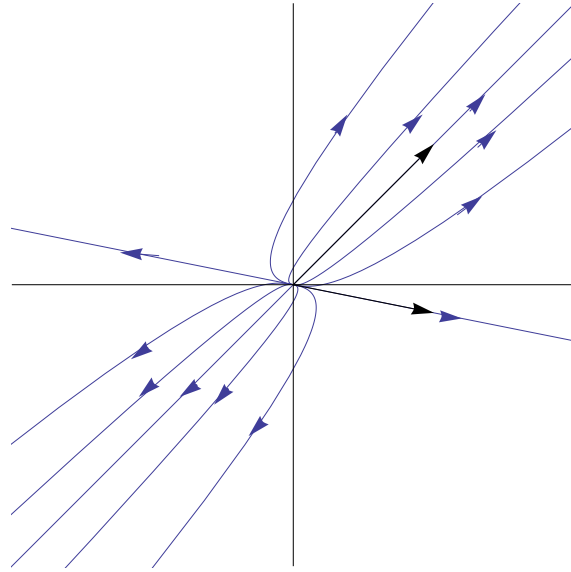
Ще разгледаме по-подробно възможните поведения на решенията на дадена линейна система в околност на равновесната точка за 2D системи. В някакъв смисъл те са представителни за възможните поведения по принцип.

- Две реални отрицателни собствени стойности  $0 > \lambda_1 > \lambda_2$ . Всички решения  $\mathbf{u}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2$  сходят към равновесната точка при  $t \rightarrow \infty$ . Да направим фазов портрет. Имаме две “прости” решения при  $c_1 = 0, c_2 = \pm 1$  и  $c_1 = \pm 1, c_2 = 0$ . Съответстващите траектории “идват” съответно от направленията на  $\mathbf{x}_2$  и  $\mathbf{x}_1$ . Всички останали траектории, при  $t \rightarrow \infty$  трябва да са успоредни на  $\mathbf{x}_1$ , тъй като първият член е доминиращ. При  $t \rightarrow -\infty$ , трябва да са успоредни на (т.е. да “идват” от направлението на)  $\mathbf{x}_2$ .

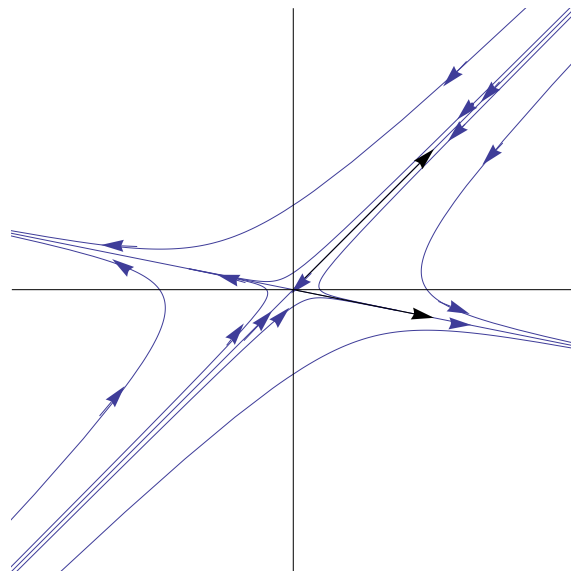


Равновесната точка в този случай се нарича **устойчив възел**.

- Аналогични разсъждения могат да бъдат направени и в случая на две положителни реални собствени стойности,  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ , само че в този случай равновесието е **неустойчив възел**.



- Нека сега  $\lambda < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . Двете “прости” решения, които се получават при  $c_1 = 0, c_2 = \pm 1$  и  $c_1 = \pm 1, c_2 = 0$  клонят към равновесната точка съответно при  $t \rightarrow \infty$  и  $t \rightarrow -\infty$ . С други думи, в този случай равновесието има една “устойчива посока”, съответстваща на отрицателната собствена стойност, и една “неустойчива посока”, съответстваща на положителната собствена стойност. За всички останали траектории при  $t \rightarrow \infty$ , те трябва да са успоредни на  $x_2$ , тъй като вторият член е доминиращ. При  $t \rightarrow -\infty$ , траекториите трябва да са успоредни на (т.е. да идват от посоката на)  $x_1$ .



В този случай равновесната точка се нарича **седло**.

- Нека сега разгледаме случая на две спрегнати комплексни собствени стойности. Нека  $\lambda_{1,2} = \tau \pm \omega i$  и съответните собствени вектори са  $x_i = A \pm B i$ .

Вече знаем, че  $\mathbf{u}(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1$  е решение и следователно реалната и комплексната му част ще бъдат сами по себе си реални решения (защо?). Използвайки формулата на Ойлер, получаваме

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= e^{(\tau t)} (\cos \omega t + i \sin \omega t) (\mathbf{A} + \mathbf{B}i) \\ &= e^{\tau t} ((\mathbf{A} \cos \omega t - \mathbf{B} \sin \omega t) + i((\mathbf{A} \sin \omega t) + \mathbf{B} \cos \omega t)) \end{aligned}$$

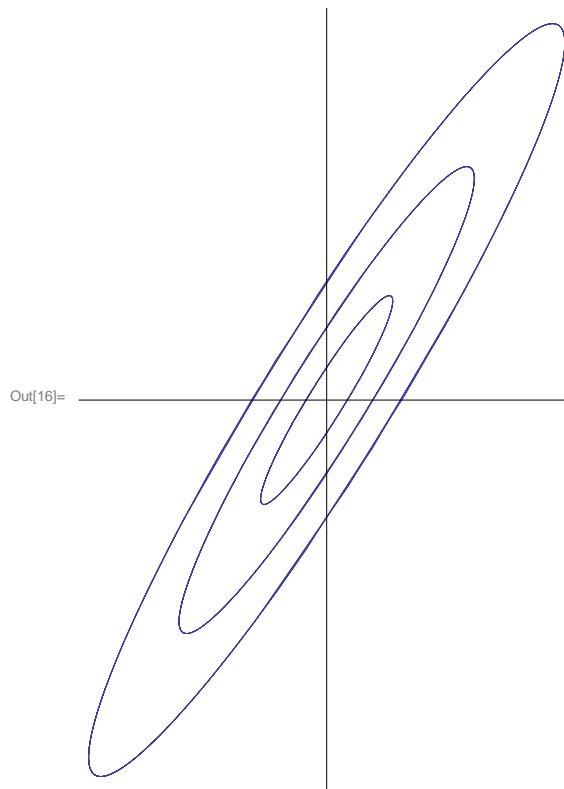
Вземайки реалната и имагинерната част поотделно получаваме две линейно-независими реални решения. Следователно общото решение в този случай е

$$\mathbf{u}(t) = e^{\tau t} (c_1 (\mathbf{A} \cos \omega t - \mathbf{B} \sin \omega t) + c_2 ((\mathbf{A} \sin \omega t) + \mathbf{B} \cos \omega t)),$$

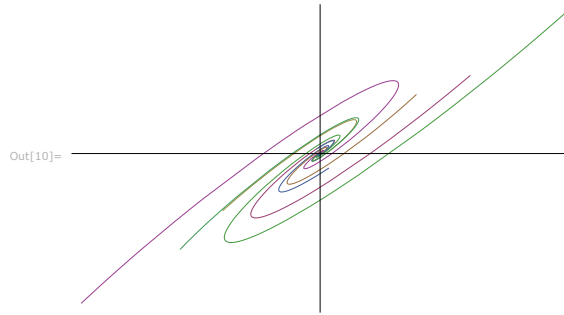
където  $c_1$  и  $c_2$  са произволни константи.

Можем да използваме, разбира се, по същия начин и  $\mathbf{x}_2$ .

Очевидно, ако собствените стойности са чисто имагинерни, тогава всички решения са периодични. Равновесната точка е устойчива но не е асимптотично устойчива. Тя се нарича **център**.



Ако всички собствени стойности имат ненулеви реални части, тогава амплитудата на осцилациите или намалява и клони към 0 (ако реалната част е отрицателна), или расте към  $\infty$  (ако реалната част е положителна). В зависимост от знака на реалната част, получаваме **устойчив** или **неустойчив фокус**.



### 4.3 Линеаризация на нелинейни автономни системи. Локални асимптотични свойства на решенията.

Нека е дадена автономната система

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f(\mathbf{u})$$

и нека  $E$  е равновесна точка. Линеаризирайки около последната, получаваме

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f(E) + J(E)(\mathbf{u} - E) + O(|\mathbf{u} - E|^2).$$

Вземайки предвид, че  $f(E) = 0$  и пренебрегвайки членовете от втори и по-висок ред, получаваме линеаризацията

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = J(E)(\mathbf{u} - E).$$

#### Твърдение 29: Теорема на Hartman–Grobman

Нека  $E$  е равновесна точка на автономната динамична система (4.4). Ако  $E$  е хиперболична, т.е. собствените стойности на матрицата на Якоби на дясната страна, пресметната в  $E$ , имат ненулеви реални части тогава в достатъчно малка околност на равновесието динамиката на (4.4) е същата като динамиката на линеаризацията

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = J(E)\mathbf{u}.$$

Да обърнем внимание, че равновесната точка е трансформирана в началото на координатната система посредством смяната  $\mathbf{u} := \mathbf{u} - E$ .



**Н.В. 31**

Теоремата на Hartman–Grobman ни позволява да изследваме локалната асимптотика на решенията в околност на равновесните точки и често анализът на една динамична система започва именно по този начин – намиране на равновесните точки и изследване на устойчивостта им. Макар този анализ да носи информация за локалните свойства на решенията в околност на равновесните точки, той, от една страна, е важен за глобалния анализ (когато такъв изобщо може да се направи), а, от друга, позволява направата на обосновани хипотези (често придружени с числени експерименти) за глобалната динамика на решенията.

Ще използваме модела на Monod (4.2) и модела на Rosenzweig–MacArthur за илюстрация на идеите до края на тази глава.

**Пример 60.** Разглеждаме модела на Monod (4.2). След подходящо обезразмеряване, той може да се запише във вида

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= (1-s)D - F(s)x, \\ \frac{dx}{dt} &= F(s)x - Dx,\end{aligned}\tag{4.6}$$

където  $F(s) = \frac{as}{b+s}$ .

Равновесните точки на модела (60) са неотрицателните решения на алгебричната система

$$\begin{aligned}(1-s)D - F(s)x &= 0, \\ F(s)x - Dx &= 0.\end{aligned}$$

Ясно е, че  $E_1 = (1, 0)$  е винаги равновесна точка. Тя обикновено се нарича точка на отмиване (англ. *wash-out equilibrium*), тъй като съответства на ситуация, при която организмите са “отмити” от биореактора и субстратът е достигнал максималната си концентрация. Другото решение на алгебричната система съответства на точката  $E^* = (s^*, 1 - s^*)$ , където  $s^* = bD/(a - D)$ . Тя е в положителния квадрант точно когато  $0 < s^* < 1$  или, което е същото  $a > D$  и  $D > \frac{b}{a+1}$ .

Нека изследваме устойчивостта на равновесните точки. Матрицата на Якоби за модела (60) има вида

$$J(s, x) = \begin{bmatrix} -D - \frac{abx}{(b+s)^2} & -\frac{as}{b+s} \\ \frac{abx}{(b+s)^2} & \frac{as}{b+s} - D \end{bmatrix}.$$

Пресметната в точката  $E_1$ , получаваме

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -D & -\frac{a}{b+1} \\ 0 & \frac{a}{b+1} - D \end{bmatrix}.$$

Матрицата е триъгълна и нейните собствени стойности  $\lambda_{1,2}$  лежат по главния диагонал. Едната,  $\lambda_1 = -D$  е винаги отрицателна. Следователно, в зависимост от това дали  $D > \frac{a}{b+1}$ , или не, точката  $E_1$  е устойчив възел или седло. Да

обърнем внимание, че последното условие е точно условието за съществуване на  $E^*$ .

За точката  $E^*$ , получаваме

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -D - \frac{ab(1-s^*)}{(b+s^*)^2} & -\frac{as^*}{b+s^*} \\ \frac{ab(1-s^*)}{(b+s^*)^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Като вземем предвид условието за съществуване на  $E^*$ , т.е.  $s^* < 1$ , е очевидно, че  $\det(J(E^*)) > 0$  и  $\text{trace}(J(E^*)) < 0$ . Следователно равновесната точка  $E^*$  е устойчив възел винаги когато съществува.

Окончателно получихме следните две възможности за съществуването и устойчивостта на равновесните точки на модела (60):

- при  $a \leq D$  или  $s^* \geq 1$ , единствената равновесна точка е  $E_1$  и тя е устойчив възел;
- при  $0 < s^* < 1$ , съществуват равновесната точка  $E_1$ , която е седло, и  $E^*$ , която е устойчив възел.

**Пример 61.** Разглеждаме модела на Rosenzweig–MacArthur (4.3), който след подходящо обезразмеряване добива вида

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - F(N)P, \\ \frac{dP}{dt} &= F(N)P - dP, \end{aligned} \tag{4.7}$$

където  $F(N) = aN/b + N$ .

Очевидно  $E_0 = (0, 0)$  и  $E_K = (K, 0)$  винаги са равновесни точки на модела. Ако има вътрешна равновесна точка, тя трябва да има координати

$$E^* = (N^*, P^*),$$

където

$$N^* = bd/(a - d), P^* = \frac{r}{a} \left(1 - \frac{N^*}{K}\right) (b + N^*)$$

. Тогава, за да съществува  $E^*$  трябва да е изпълнено  $a > d$  и  $N^* < K$ .

Матрицата на Якоби за (4.7) има вида

$$J(E) = \begin{bmatrix} r - \frac{2rN}{K} - \frac{abP}{(b+N)^2} & -\frac{aN}{b+N} \\ \frac{abP}{(b+N)^2} & \frac{aN}{b+N} - d \end{bmatrix}.$$

Тогава  $J(E_0) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$  и точката  $E_0$  винаги е седло. За другото гранично равновесие получаваме

$$J(E_K) = \begin{bmatrix} -r & -\frac{aK}{b+K} \\ 0 & \frac{aK}{b+K} - d \end{bmatrix}.$$

Едната собствена стойност е  $-r$  и винаги е отрицателна. От знака на другата зависи устойчивостта на  $E_K$ . Така равновесната точка  $E_K$  е устойчив възел,

### 4.3. Линеаризация на нелинейни автономни системи. Локални асимптотични свойства на решенията

ако  $aK/(b+K) < d$  и е седло, ако  $aK/(b+K) > d$ . Да обърнем внимание, че последното е точно условието за съществуване на  $E^*$  (проверете!).

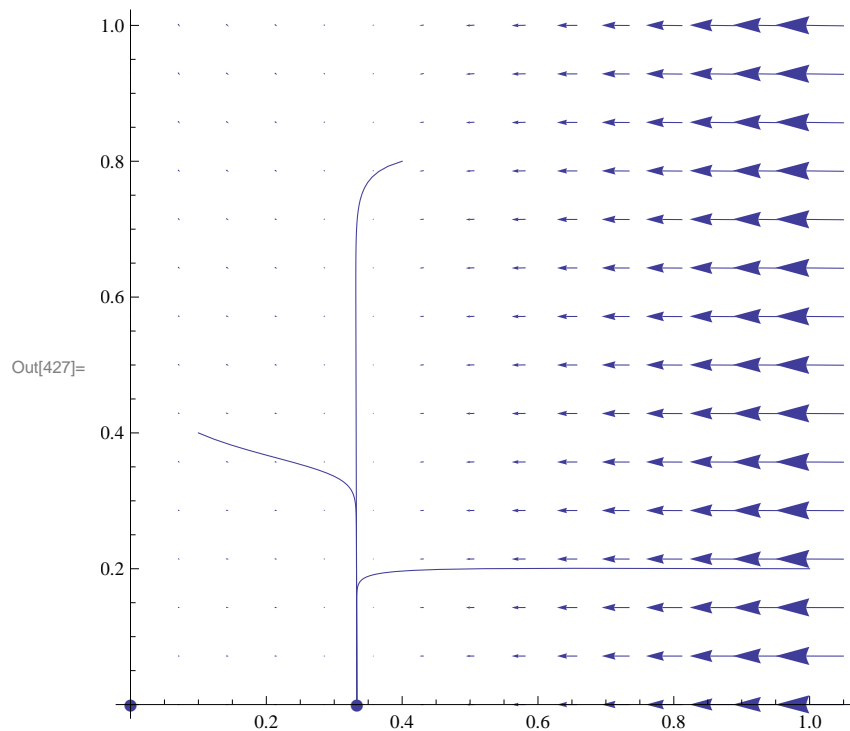
Остана да изследваме локалната устойчивост на равновесната точка  $E^*$  в случая, когато последната съществува. Имаме

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} r - 2r \frac{N^*}{K} - \frac{abP^*}{(b+N^*)^2} & -\frac{aN^*}{b+N^*} \\ \frac{abP^*}{(b+N^*)^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно детерминантата на матрицата е положителна и собствените стойности имат еднакви знаци. Така точката е асимптотично устойчива, ако следата на матрицата е отрицателна, т.е.  $r - 2r \frac{N^*}{K} - \frac{abP^*}{(b+N^*)^2} < 0$  или, което е същото  $K < (a+d)b/(a-d)$  (проверете!). Ако е положителна, тогава точката е неустойчива.

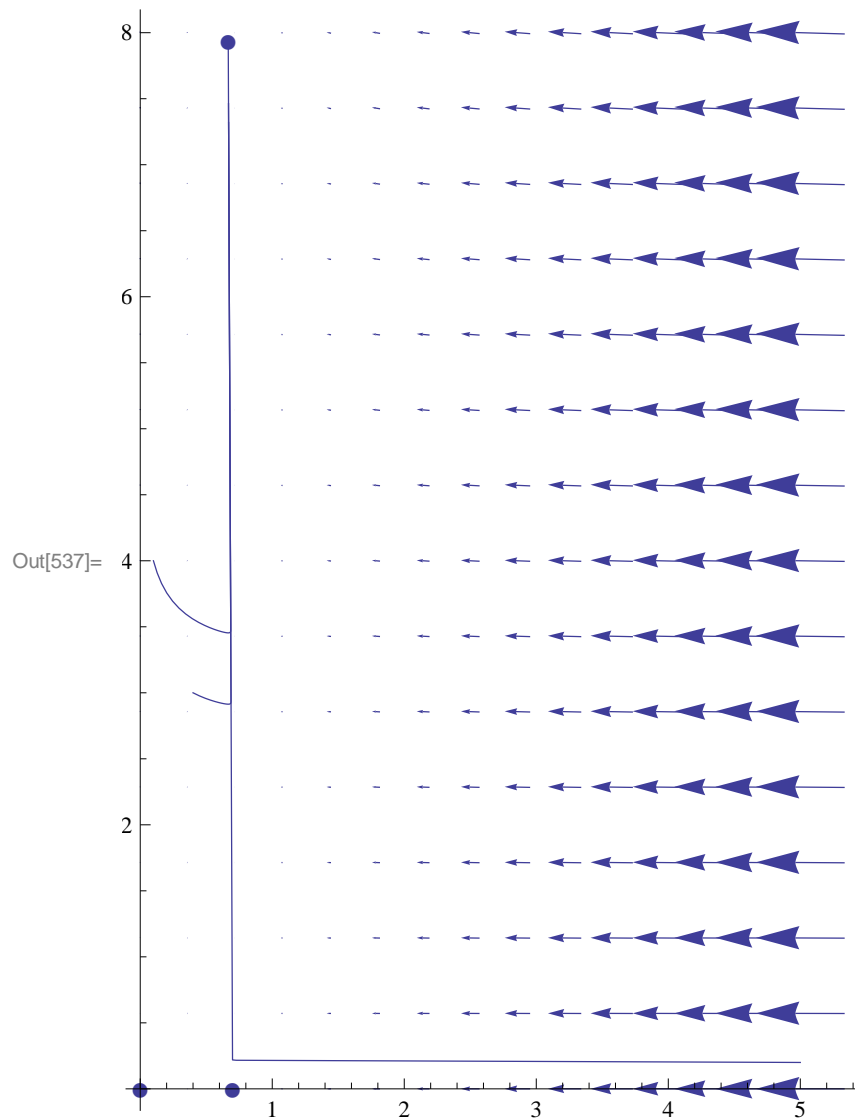
И така, съществуват три възможности, които илюстрираме по-долу.

- Две равновесни точки –  $E_0$ , която е седло, и  $E_K$ , която е устойчив възел. Примерен фазов портрет, получен за този случай, илюстрираме по-долу.



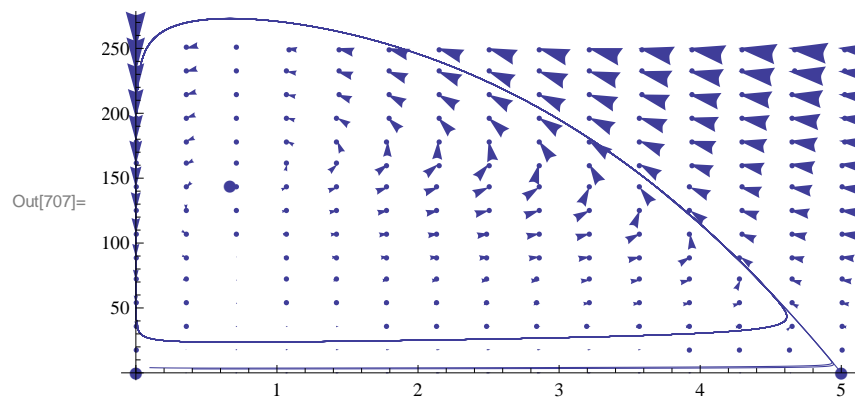
Численият пример ни навежда мисълта, че граничното равновесие вероятно е глобално устойчиво. Разбира се, за да направим такава хипотеза, е желателно да направим не само един числен експеримент за параметри, удовлетворяващи условията.

- Три равновесни точки –  $E_0, E_K$  са седла, а  $E^*$  е асимптотично устойчива (може да бъде фокус или възел):



И в този случай, числените експерименти предполагат, че в случая, когато вътрешната равновесна точка е асимптотично устойчива, тя е глобално асимптотично устойчива.

- Три равновесни точки –  $E_0, E_K$  са седла, а  $E^*$  е неустойчива (може да бъде фокус или възел):



Численият пример предполага съществуването на глобално асимптотично устойчива периодична орбита (граничен цикъл) в този случай.

## 4.4 Глобална асимптотика на решенията

В някои случаи може да се изследва глобалната динамика на разглежданата система. Ще се запознаем с някои основни резултати, които позволяват това. Целта на настоящата секция (и на цялата глава) е да даде най-обща представа за това какво би могло да се извлече като информация за асимптотиката на решенията на дадена динамична система. По тази причина част от твърденията, които са по-технически, ще пропуснем и ще се концентрираме върху приложението на тези класически резултати за изследване на динамичните системи. Много по-подробен увод в обширната теория на динамичните системи (и в частност доказателства на всички твърдения) може да бъде намерен в [6, 10, 20].

Ще започнем с две дефиниции.

### Дефиниция 29: $\omega$ -гранична точка

Нека  $\gamma$  е дадена траектория. Казваме, че точката  $\mathbf{p}$  от фазовото пространство е  $\omega$ -гранична точка за  $\gamma$ , ако съществува редица  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow +\infty$ , такава че  $\{\gamma(t_i)\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow \mathbf{p}$ .

### Дефиниция 30: $\omega$ -гранично множество

Множеството от всички  $\omega$ -гранични точки на траекторията  $\gamma$  ще наричаме  $\omega$ -гранично множество на  $\gamma$  и ще бележим  $\omega(\gamma)$ .

*Забележка.* По същия начин могат да се дефинират  $\alpha$ -гранична точка и  $\alpha$ -гранично множество, като вземем  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow -\infty$ .

С други думи, за да определим асимптотиката на решенията на дадена динамична система, трябва да характеризираме  $\omega$ -граничните множества на съответните траектории.

Следващото твърдение дава информация за основните свойства на  $\omega$ -граничното множество на дадена траектория.

### Твърдение 30

Нека  $\gamma$  е траектория, ограничена в компакт. Тогава  $\omega(\gamma)$  е непразно, ограничено, свързано, затворено, инвариантно множество.

Преди да докажем твърдението, трябва да обясним какво се има предвид под “инвариантно” множество.

**Дефиниция 31: Инвариантни множества**

Казваме, че подмножеството  $\Omega$  на фазовото пространство е **положително-инвариантно множество** за динамичната система (4.4), ако за всяко начално условие  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  съответната траектория изпълнява  $\gamma_{\mathbf{x}_0}(t) \in \Omega, \forall t > 0$ . Аналогично се дефинира **отрицателно-инвариантно множество**. Ако едно множество е положително-инвариантно и отрицателно-инвариантно, то се нарича **инвариантно множество**.

Сега вече сме готови да пристъпим към доказателството на твърдението.

*Доказателство.* В предстоящото изложение ще използваме ограничеността, затвореността и инвариантността. Затова ще коментираме само тях.

Ограничеността е очевидна, вземайки предвид, че  $\gamma$  е ограничена. Ще докажем затвореността и инвариантността.

- Затвореност. Нека изберем сходяща редица от точки от  $\omega(\gamma)$ :

$$p_1, p_2, \dots \rightarrow p.$$

Трябва да докажем, че  $p \in \omega(\gamma)$ . Действително:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n = n(\varepsilon) : |p_k - p| < \varepsilon, k \geq n.$$

От друга страна,

$$\forall k \exists \{t_{k,i}\}_{i=1}^{\infty} : |\gamma(t_{k,i}) - p_k| \rightarrow 0.$$

Сега затвореността следва от

$$|\gamma(t_{k,i}) - p| \leq |\gamma(t_{k,i}) - p_k| + |p_k - p|.$$

- Инвариантност. Ако  $q \in \omega(\gamma)$ , то съществува  $\{t_n\} \rightarrow \infty$  така, че

$$\gamma(t_n) \rightarrow q.$$

Но тогава от съображения за непрекъснатост

$$\gamma_p(t + t_n) \rightarrow \gamma_q(t), \forall t.$$

Следователно точката  $\gamma_q(t)$  е от  $\omega(\gamma)$ , с което инвариантността е доказана.

□

### 4.4.1 Теория на Poincarè–Bendixson

Оказва се, че в двумерни задачи съществува особено хубава характеристика на  $\omega$ -границното множество на дадена траектория. За такива  $\omega$ -границното множество не може да бъде “прекалено сложно”.

**Твърдение 31: Теорема на Poincaré–Bendixson**

Нека  $\gamma$  е траектория, ограничена в ограниченото и затворено множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , в което има краен брой равновесни точки. Тогава е в сила точно една от следните три възможности:

- $\omega(\gamma)$  е равновесна точка;
- $\omega(\gamma)$  е периодична орбита;
- $\omega(\gamma)$  съдържа краен брой равновесни точки и траектории, които ги свързват (по-точно  $\alpha$ - и  $\omega$ -граничното множество на всяка от тези траектории е някоя от равновесните точки в  $\omega(\gamma)$ ).

Възможните случаи са илюстрирани на следната фигура

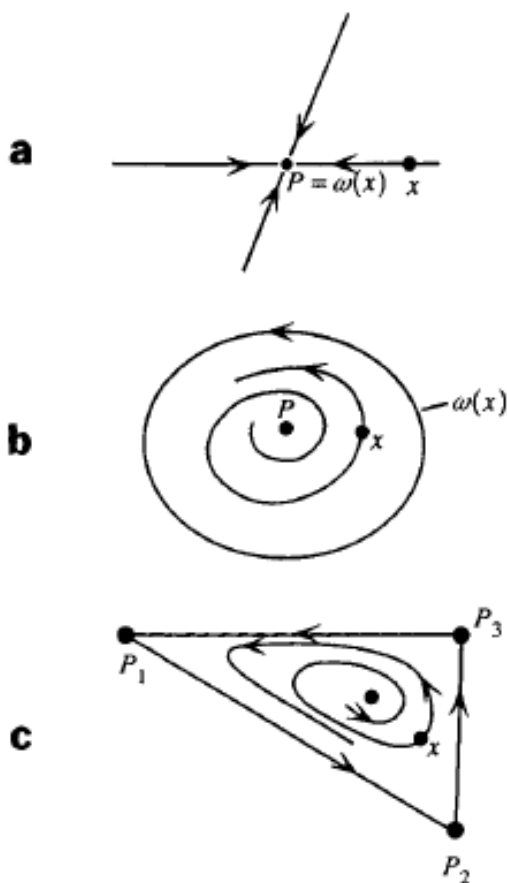


Figure Examples of limit sets for planar systems: a a rest point; b a periodic orbit; c multiple rest points with connecting orbits.

И така, за да разберем в кой случай се намираме, трябва да изключим останалите два. За тази цел полезни са следващите два резултата:

**Твърдение 32: Критерий на Dulac**

Ако съществува  $C^1$ -гладка функция  $\varphi(x, y)$  такава, че

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y}$$

не сменя знака си в свързаното множество  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , то динамичната система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

няма периодични орбити, лежащи изцяло в  $\Omega$

*Доказателство.* Доказателството е просто приложение на теоремата на Green. Нека без ограничение на общността приемем, че

$$\frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y} > 0$$

в  $\Omega$ . Да допуснем, че съществува периодична орбита  $C$  в  $\Omega$ , която загражда областта  $D \in \Omega$ . Тогава теоремата на Green ни дава

$$0 < \iint_D \left( \frac{\partial(\varphi f)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi g)}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C \varphi \left( -\frac{dy}{dt} dx + \frac{dx}{dt} dy \right) = 0.$$

Полученото противоречие означава, че допускането ни е грешно и не съществува периодична орбита  $C$  в  $\Omega$ .  $\square$

Преди да формулираме следващия резултат, нека въведем следните понятия.

**Дефиниция 32**

Нека  $E$  е хиперболична равновесна точка. Нека матрицата на линеаризацията на динамичната система около  $E$  има  $k$  собствени стойности с положителни реални части и  $n - k$  собствени стойности с отрицателни реални части. Тогава съществуват следните многообразия с размерности съответно  $k$  и  $n - k$ :

$$M^+(E) := \{x : \gamma_x(t) \rightarrow E, t \rightarrow +\infty\},$$

което се нарича **устойчиво** многообразие и

$$M^-(E) := \{x : \gamma_x(t) \rightarrow E, t \rightarrow -\infty\},$$

което се нарича **неустойчиво** многообразие.

В горните дефиниции с  $\gamma_x(t)$  е означена траекторията, минаваща през точката  $x$  от фазовото пространство.



**Твърдение 33: Лема на Butler–McGehee**

Нека  $E$  е хиперболична равновесна точка, която е в  $\omega$ -гранично множество на траекторията  $\gamma$ , но не е цялото множество. Тогава  $\omega(\gamma)$  има нетривиално (т.е. различно от  $E$ ) сечение с устойчивото и неустойчивото многообразия на  $E$ .

Както можем да се убедим от формулировката на основните твърдения, съществено изискване за приложимостта на формулираната теория е траекториите да са ограничени. Ще покажем, че това е така за моделите на Monod и Rosenzweig–MacArthur, които използваме като примери, върху които илюстрираме теорията в настоящата глава. Впрочем за тези модели е важно да се уверим, че положителният квадрант е положително-инвариантно множество и по друга причина – иначе моделите не биха били биологически смислени.

*Забележка.* Без ограничение на общността и в двата модела ще положим  $\chi = 1$ . Може да се направи обезразмеряване, така че това предположение да е в сила.

**Пример 62.** Нека разгледаме първо модела на Monod (4.2). Ясно е, че решенията са ограничени отдолу от координатните оси и положителният квадрант е положително инвариантно множество. Това следва от поведението на векторното поле на границата:

- При  $s = 0$ , е в сила  $ds/dt = s_{in}D > 0$  и следователно векторното поле по ординатната ос е насочено към вътрешността на положителния квадрант.
- При  $x = 0$ , е в сила  $dx/dt = 0$ , т.е. векторното поле по абсцисната ос е насочено тангенциално на положителния квадрант.

Следователно нито една траектория не може да пресече някоя от координатните оси.

Впрочем, можехме да покажем положителността на решенията и аналитично. От второто уравнение например следва, че

$$dx/x = (F(s) - D)dt$$

и следователно

$$x(t) = x(0)e^{\int_0^t (F(s(\tau)) - D)d\tau}.$$

Аналогично следва ограничеността отдолу и на  $s(t)$ , вземайки предвид, че

$$\frac{ds}{dt} > -sD - F(s)x.$$

Остава да докажем, че  $s$  и  $x$  са ограничени и отгоре.

- В сила е

$$\frac{ds}{dt} \leq (s_{in} - s)D$$

и следователно  $s(t) \leq \max\{s_{in}, s(0)\}$ .

- Ако съберем двете уравнения, получаваме

$$\frac{d}{dt}(s+x) = s_{in}D - (s+x)D.$$

От последното очевидно следва ограничеността на  $s+x$  а оттам и ограничеността на  $x$ .

**Пример 63.** По подобен начин може да се докаже ограничеността на решенията за модела (4.3). Първо, положителната инвариантност на положителния квадрант следва аналогично на предишния пример. Ще докажем ограничеността на решенията отгоре.

- Имаме

$$\frac{dN}{dt} \leq aN \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Следователно

$$N(t) \leq \max\{K, N(0)\}.$$

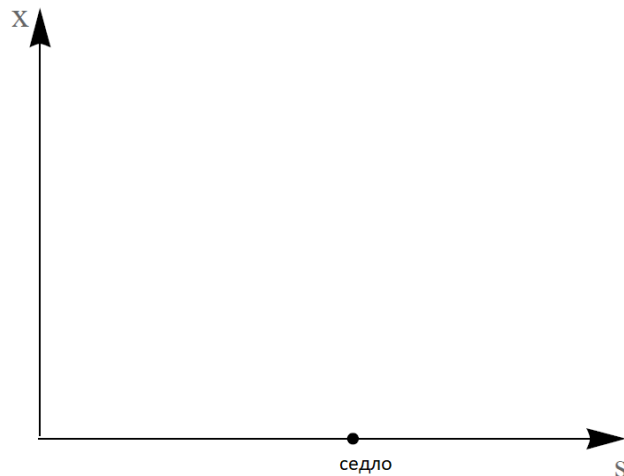
- Събирайки двете уравнения, получаваме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(N+P) &= aN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - dP \\ &= aN \left(1 - \frac{N}{K} + d\right) - d(N+P). \end{aligned}$$

Сега, вземайки предвид ограничеността на  $N$ , непосредствено следва ограничеността на  $N+P$  и оттам на  $P$ .

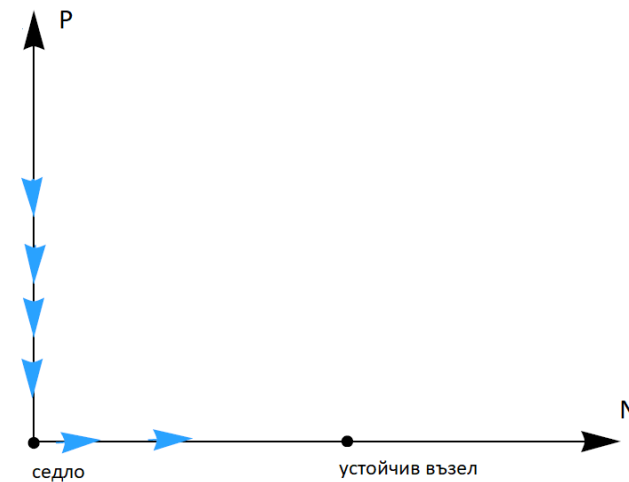
И така, след като показахме ограничеността на траекториите за двата модела, можем да пристъпим към прилагането на теоремата на Poincaré–Bendixson за установяване на глобалната асимптотика на решенията в някои от случаите.

**Пример 64.** В случая, когато моделът на Monod (4.2), няма вътрешни равновесия, граничното равновесие е глобално асимптотично устойчиво. Илюстрираме случая на следната графика:



Действително, тъй като няма вътрешни равновесни точки, не е възможно наличието на периодични орбити. Тогава, тъй като моделът има единствена равновесна точка, от теоремата на Poincaré–Bendixson следва, че тя е глобално асимптотично устойчива.

**Пример 65.** В случая, когато моделът на Rosenzweig–MacArthur (4.3) няма вътрешни равновесни точки, ще покажем, че граничното равновесие  $E_K = (K, 0)$  е глобално асимптотично устойчиво. Илюстрираме случая на следната графика:

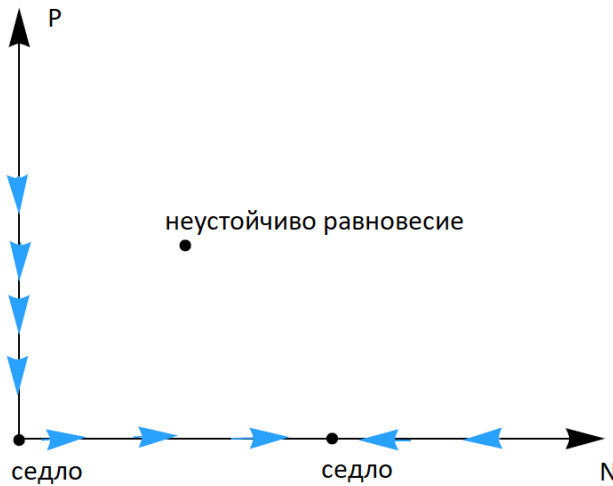


Тъй като няма вътрешни равновесни точки, можем да изключим възможността за периодични орбити. Тогава, за да докажем, че  $E_K$  е глобално асимптотично устойчива, трябва да изключим и възможността  $E_0 = (0, 0)$  да бъде в  $\omega$ -граничното множество на дадена траектория (очевидно не е цялото  $\omega$ -гранично множество, тъй като  $E_0$  е седло).

Да допуснем обратното, т.е. че  $E_0 \in \gamma$  за някоя траектория  $\gamma$ . Тогава от лемата на Butler–McGehee следва, че  $\omega(\gamma)$  има нетривиално сечение с устойчивото многообразие на  $E_0$ , т.е. положителната полуос. От инвариантността на  $\omega(\gamma)$  следва, че цялата положителна полуос трябва да се съдържа в  $\omega(\gamma)$ . Но последното е в противоречие с ограничеността на  $\omega(\gamma)$ .

Следователно за коя да е траектория  $\gamma$ ,  $E_0 \notin \omega(\gamma)$  и от теоремата на Poincaré–Bendixson следва, че  $\omega(\gamma) = \{E_K\}$ .

**Пример 66.** В случая, когато моделът на Rosenzweig–MacArthur (4.3) има неустойчива вътрешна равновесна точка, ще покажем, че съществува глобално асимптотично устойчив граничен цикъл. Илюстрираме случая на следната графика:



Първо, аналогично на предишния пример можем да покажем, че  $E_0$  не съдържа в  $\omega$ -граничното множество на нито една траектория. Да допуснем, че  $E_K = (K, 0) \in \omega(\gamma)$  за някоя траектория  $\gamma$ . Тогава от лемата на Butler–McGehee следва, че  $\omega(\gamma)$  трябва да съдържа или точка от абсцисата в интервала  $(0, K)$ , или в  $(, +\infty)$ . Използвайки инвариантността и затвореността на  $\omega(\gamma)$ , това означава, че или  $E_0 \in \omega(\gamma)$ , което доказахме, че е невъзможно, или  $\omega(\gamma)$  съдържа неограничено множество, което също е невъзможно. И така,  $E_K$  също не може да бъде в  $\omega(\gamma)$ . Вътрешната равновесна точка е неустойчива и следователно не може да бъде цялото  $\omega$ -гранично множество. Така остава единствената възможност всяка траектория с положителни начални условия, различна от равновесната точка, да клони към периодична орбита.

#### 4.4.2 Теорема на Ляпунов. Принцип за инвариантност на ЛаСал.

Както отбелязахме, теорията на Poincaré–Bendixson е валидна само в 2D. Тук ще приведем един общ резултат, който е валиден за произволни системи.

##### Твърдение 34: Теорема на Ляпунов

Разглеждаме системата

$$\frac{du}{dt} = f(u), u \in \mathbb{R}^n.$$

Нека съществува функция  $V : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такава, че:

- (i)  $V(x) \geq 0, x \in \Omega \setminus \{0\} \quad V(0) = 0;$
- (ii)  $\dot{V} = \nabla V \cdot f \leq 0.$

Тогава  $x = 0$  е устойчива равновесна точка. Ако в допълнение  $\cdot V$  е отрицателно определена, Тогава  $x = 0$  е асимптотично устойчива.

*Доказателство.* Виж Теорема 1.1. на стр. 313 в [6].

□

**Дефиниция 33**

Функция, която изпълнява условия (i)–(ii) от последната теорема, се нарича **функция на Ляпунов**. Ако е изпълнено само (ii) функцията ще наричаме **слаба функция на Ляпунов**.

Лесно се проверява, че положително-определените квадратични форми са функции на Ляпунов за дадена устойчива линейна система.

**Пример 67.** Разглеждаме системата

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x, \\ \frac{dy}{dt} &= -5y.\end{aligned}$$

Тогава лесно се проверява, че функцията  $V(x, y) = x^2 + y^2$  е функция на Ляпунов за дадената система. Действително, първото условие е очевидно изпълнено. Освен това имаме

$$\dot{V} = (2x, 2y) \cdot (-2x, -5y).$$

За съжаление няма общ подход за намирането на функция на Ляпунов за дадена произволна система. Често на практика е по-лесно да се приложи идеята, като се използва следното твърдение.

**Твърдение 35: Принцип за инвариантност на LaSalle**

Нека  $V$  е слаба функция на Ляпунов в областта  $G$  и  $\gamma$  е ограничена орбита, която лежи в  $G$ . Тогава  $\omega(\gamma) \subset M$ , където  $M$  е най-голямото инвариантно подмножество на

$$\{x \in G : \dot{V}(x) = 0\}.$$

*Доказателство.* Виж Теорема 1.3 на стр. 316 в [6]. □



# Глава 5

## Тензорно смятане и приложения

### 5.1 Тензори

Тук прочети отбелязаните в конспекта страници от [17].

### 5.2 Уравнения на Navier–Stokes

Уравненията на Navier–Stokes са основният модел при описване движението на вискозни флуиди. Основните уравнения отразяват закони за запазване. Общият вид на закона за запазване, обусловен от адвективен поток с поле на скоростите  $\mathbf{u}$ , е

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\phi \mathbf{u}) + s, \quad (5.1)$$

където  $\phi$  е величината, която се запазва, а  $s$  описва източникови членове. В частност уравненията на Navier–Stokes отразяват запазване на линейния момент и масата:

- **Запазване на масата.** Полагаме  $\phi = \rho$  в (5.1), плътността на флуида, вземаме предвид, че маса не се генерира, т.е.  $s = 0$ , и получаваме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (5.2)$$

Да отбележим, че, тъй като разглеждаме непрекъснатата среда, вместо масата, използваме съответната точкова характеристика  $\rho$ .

- **Запазване на линейния момент.** Полагаме  $\phi = \rho \mathbf{u}$  в (5.1) и получаваме

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) + \mathbf{s},$$

където  $\mathbf{s}$  описва сили на единица площ/обем, които действат на флуида, например гравитация и др. Разкриваме скобите, като използваме тъждеството (вж. допълнителните задачи)

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}.$$

Получаваме

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla \rho \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) - \rho \nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{u} - \rho \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{s} \\ &= -\mathbf{u} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{s}. \end{aligned}$$

Сега, като използваме (5.2), окончателно получаваме

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{s}.$$

Последното може да бъде записано и във вида

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{s}, \quad (5.3)$$

където  $D/Dt$  означава материалната производна. Впрочем така описаното уравнение има съвсем очевиден физичен смисъл, като вземем предвид, че  $D\mathbf{u}/Dt$  е ускорението на частицата в съответната точка, изразено в Ойлерови координати – то е аналогично на втория закон на Нютон.

Уравнения (5.2) и (5.3) задават общия вид на уравненията на Navier–Stokes. За да можем да ги решаваме обаче, е необходимо да опишем източниковия член  $\mathbf{s}$ . Силите, които действат върху флуида, са, от една страна, външни сили (например гравитация) – нека ги означим с  $\mathbf{f}$  и нека считаме, че са известни – и вътрешни сили, породени от взаимодействието между частиците на флуида. Тъй като говорим за непрекъснати среди, за да опишем силите, ни е необходимо да ги скалираме с единица площ, за да получим съответна точкова характеристика. Така възниква идеята за понятието напрежение.

#### Дефиниция 34: Вектор на напрежение

Силата на единица площ, действаща върху равнина с нормала  $\mathbf{n}$ , ще наричаме **вектор на напрежение в направление  $\mathbf{n}$**  и ще бележим с  $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ .

Ясно е, че в дадена точка могат да се изберат безброй много направления и, за да намерим резултантната сила, действаща в точката, е необходимо да сумираме силите във всички направления. Оказва се обаче, че последните могат да се опишат с помощта на тензорно поле  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ .

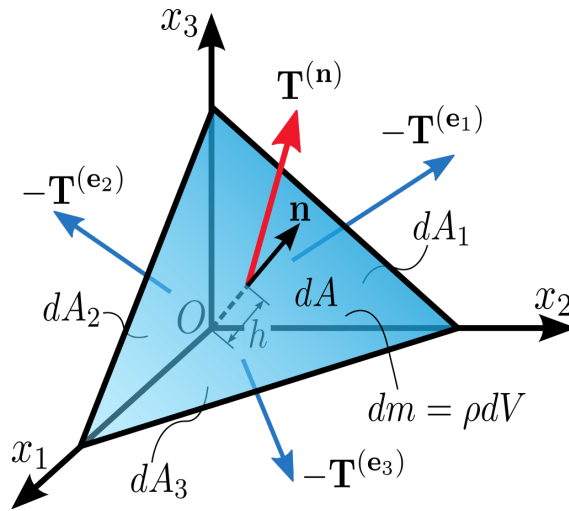
#### Твърдение 36: Теорема на Коши за напреженията

Съществува тензор от втори ред  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ , наричан **тензор на напреженията на Коши**, за който

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

*Доказателство.* Да разгледаме инфинитезимален тетраедър от флуида, както е показано на следващата фигура:





Като използваме означенията от фигурата, балансът на сили ни дава равенството

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} dA - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} dA_1 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} dA_2 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} dA_3 = \rho \left( \frac{h}{3} dA \right) \mathbf{a},$$

където  $\mathbf{a}$  е ускорението.

Вземайки предвид, че

$$dA_i = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) dA = n_i dA$$

получаваме

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} n_1 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} n_2 - \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} n_3 = \rho \left( \frac{h}{3} \right) \mathbf{a}.$$

Свивайки обема в точка, т.е. пускайки  $h \rightarrow 0$ , получаваме окончателно

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)} n_1 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)} n_2 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)} n_3.$$

С други думи, напрежението в произволно направление  $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$  може да се изрази линейно като комбинация на напреженията в три ортогонални направления и следователно съществува тензор  $\boldsymbol{\sigma}$ , който отговаря на твърдението.  $\square$

И така, за да опишем силите, действащи в инфинитезимална околност  $\Omega$  на дадена точка, имаме

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega.$$

Така окончателно получаваме

$$\mathbf{s} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}$$

и уравненията на Navier-Stokes добиват вида

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0. \end{aligned}$$

Да обърнем внимание, че в така получената система имаме две уравнения и три неизвестни –  $\mathbf{u}$ ,  $\rho$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$ . Впрочем това е стандартната ситуация в моделите на

механиката на непрекъснатите среди. **За да бъде затворена тази система, е необходимо използването на конститутивна релация.** Конститутивните релации са (обикновено емпирични) закони, които описват материалните свойства на непрекъснатата среда, която се разглежда. Обикновено тези релации задават конкретен вид на тензора на напреженията. Уравненията, описващи законите за запазване, са общи и в сила за всяка непрекъсната среда. Към тях обаче трябва да се добави уравнение, което описва конкретната среда. Ние ще дадем пример за конститутивна релация, описваща несвиваеми ( $\rho \equiv const$ ) Нютонови флуиди. Това е може би най-често срещания модел, свързан с описването на флуиди. За тези флуиди се приема, че е в сила **конститутивната релация на Stokes**:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T),$$

където  $p$  е налягането на флуида, а  $\mu$  е неговият вискозитет. Тогава, като използваме уравнението на непрекъснатостта, получаваме (проверете!)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla p + \mu\Delta\mathbf{u}.$$

Така окончателно получаваме следния модел, описващ движението на несвиваем Нютонов флуид:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \end{aligned}$$

където  $\mathbf{g} = \mathbf{f}/\rho$ , а  $\nu = \mu/\rho$  е т.нар. **кинематичен вискозитет**.

Можем да запишем последната система и във вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0. \end{aligned}$$

В Декартови координати получаваме следната координатна форма, която ще запишем в 2D за простота:

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}^{\text{инерциални членове}} &= \overbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}^{\text{дивергенция на } \boldsymbol{\sigma}} + \underbrace{g_x}_{\text{външен източник}}, \\ \underbrace{\phantom{\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}}_{\text{конвективни членове}} & \underbrace{\phantom{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}}_{\text{дифузионни членове}} \end{aligned}$$

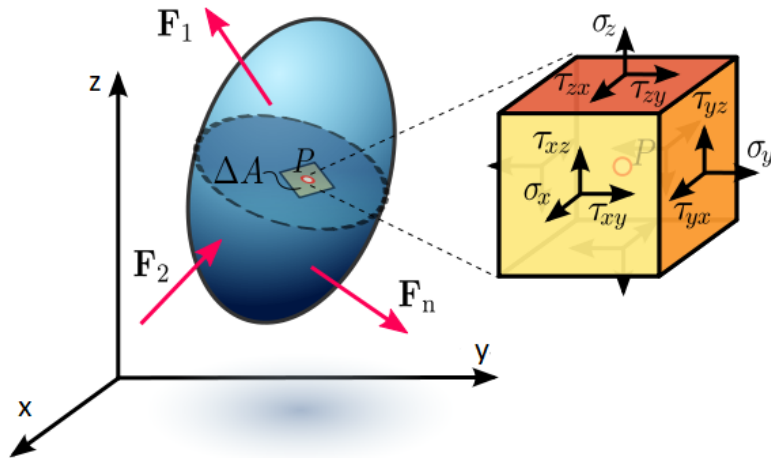
$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

В последното сме означили компонентите на  $\mathbf{u}$  с  $\mathbf{u} = (u, v)^T$ .

Нека накрая коментираме още малко тензора на напреженията  $\boldsymbol{\sigma}$ . По-точно, нека разгледаме представянето му в Декартови координати:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Както знаем, в стълбовете на последната матрица се съдържат координатите на базисните вектори  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  под действието на трансформацията  $\sigma$ . Но това са точно  $\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_x)}$ ,  $\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_y)}$ ,  $\mathbf{T}^{(\mathbf{e}_z)}$ , разгледайте следната фигура:



С други думи,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  са нормалните компоненти на напрежението, действащо върху стените с нормали  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ , а  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$  са съответните тангенциални напрежения (обикновено в литературата се използва терминът срязващи напрежения).



# Библиография

- [1] A. Björck, Numerical Methods for Least Squares, 1996.
- [2] Б. Боянов, Лекции по числени методи, Дарба, 2008.
- [3] B. Cooperstein, Advanced Linear Algebra, 2nd Edition, CRC Press, 2015.
- [4] P. Englezos, N. Kalogerakis, Applied Parameter Estimation for Chemical Engineers, 2000.
- [5] P.E. Frandsen et al., Unconstrained Optimization, 2004.
- [6] J. Hale, Ordinary Differential Equations, 1980.
- [7] R Hibbeler, Engineering Mechanics – Statics & Dynamics, Pearson, 2015.
- [8] G. James, Modern Engineering Mathematics, Pearson Education Ltd, 2015.
- [9] W. Kaplan, Advanced Calculus, Pearson, 5th ed., 2002.
- [10] Y. Kuznetsov, Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 1998.
- [11] D. Lay, S. Lay, J. McDonald, Linear Algebra and its Applications, 5th Edition, Pearson, 2016.
- [12] N. Loehr, Advanced Linear Algebra, CRC Press, 2014.
- [13] Madsen et al., Methods for non-linear least squares problems, 2004.
- [14] J. Nocedal, S. Wright, Numerical Optimization, 2006.
- [15] H. Ricardo, A Modern Introduction to Linear Algebra, CRC Press, 2010.
- [16] R. Serway, J. Jewett, Principles of Physics. A Calculus-Based Text, 4th Edition, Brooks Cole, Cengage, 2005.
- [17] J. Simmonds, A Brief on Tensor Analysis, Springer, 1982.
- [18] J. Stewart, Calculus, Brooks/Cole, Cengage learning, 7th Edition, 2012.
- [19] G. Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley-Cambridge Press, 4th Edition, 2009.
- [20] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer, 2003.

- [21] D. Zill, Advanced Engineering Mathematics, 5th Edition, Jones & Bartlett Learning, 2014.

Материалът в първа част на настоящия курс е до голяма степен повлиян от източници [18, 19] и в по-малка степен от [8, 11, 21]. За въведението в Нютоновата механика се препоръчват [7, 16]. Останалите са допълнителни източници, които могат да служат за справка в областта на линейната алгебра и ДИС при необходимост.