Теоретични основи на индустриалната математика

КОНСПЕКТ

Теоретични основи на индустриалната математика – част 1

I. Векторно смятане и приложения

1. Вектори в R^n. Векторни функции на скаларен аргумент

Дефинирайте пространството R^n. Дайте примери за вектори величини и обяснете как те могат да се представят с елементи от R^n. Приведете двете еквивалентни дефиниции за стандартното скаларно произведение в R^n и обяснете за какво се използва. Приведете двете еквивалентни дефиниции за векторно произведение и обяснете за какво се използва. Въведете понятието векторна функция на скаларен аргумент. Дайте примери за величини, които се описват с такива функции. Въведете понятието граница и докажете, че пресмятането на граници може да става покомпонентно. Въведете понятието производна. Дайте физическа и геометрична интерпретация.

Трябва да можете: *Да визуализирате графиката на дадена функция (Упр. 1/1,2, 4,5), да интерпретирате графиката – къде расте, намалява и др. (Упр. 1/ 3), да намерите и построите допирателния вектор на дадена крива (Упр. 1/ 1, 2), да запишете дадена система ОДУ като едно векторно ОДУ и, като използвате Mathematica (реализирате даден числен метод), да го решите и визуализирате резултата (Упр. 1/ 4,5,6)* _

2. Движение по криволинейна траектория

Да се изведат моделите на снаряд и система от пружина и маса със и без съпротивление на въздуха.

Да се покаже, че ако тяло се движи равномерно по окръжност, на тялото действа центростремителна сила. За произволно криволинейно движение да се изведат тангенциалната и нормалната компоненти на ускорението. За тази цел да се въведат понятията локален базис и кривина на крива.

Трябва да можете: *Да анимирате движението на частица по дадена траектория (Упр. 1/6, лек. 1.2/ Пример 6), да намирате траекторията на дадена частица по дадена скорост/ускорение и начални условия (лек. 1.2/ Пример 6), да намирате таннгенциална и нормална компонента на ускорението (лек. 1.2/ Пример 18)*

3. Скаларни функции на векторен аргумент

Въведете понятието скаларна функция на векторен аргумент. Дайте примери за величини, които се описват от такива функции. Как можем да визуализираме тези функции? Приведете пример. Дефинирайте понятията граница, частна производна, производна по направление. За всяко от тях приведете интуитивна (а, ако е възможно, и геометрична) интерпретация. Изведете линеаризацията на дадена скаларна функция на векторен аргумент. Запишете я в операторен вид. Обяснете какъв е смисълът от линеаризацията. Изведете формула за пресмятане на производна по направление. Дайте геометрична интепретация. Дайте координатно-инвариантна дефиниция за градиент и избройте основните му свойства.

<u>Трябва да можете:</u> Да визуализирате графиката на дадена функция (Упр. 2/1,2,6), да интепретирате понятието производна – къде функцията расте/намалява в съответната посока – по-бързо, по-бавно и др. (Упр. 2/4,5), да намирате линеаризацията на дадена функция и да построявате допирателната равнина на дадена повърхнина (Упр. 2/ 6), като ползвате "chain rule", да правите смяна на променливите в израз, в който има диференциален оператор (Упр. 2/ 8,9), да намирате и визуализирате градиента на дадена функция (Упр. 2/ 7), да интерпретирате понятието производна по направление (Упр. 2/ 10)

4. Векторни функции на векторен аргумент

Въведете понятието векторна функция на векторен аргумент. Дайте примери за величини, които се описват от такива функции. Обяснете как се визуализират тези функции. Приведете пример. Дефинирайте понятието граница. Изведете линеаризацията на дадено векторно поле. Опишете накратко метода на Нютон за решаване на нелинейни алгебрични системи. Мотивирайте въвеждането на понятието дивергенция и дайте две дефиниции – в координатна форма (изведете я!) и координатно-инвариантна. Дайте примери, с които да обясните какво означава дивергенцията на дадено векторно поле да е положителна и какво – отрицателна. Мотивирайте въвеждането на понятието ротация на векторно поле. Дайте дефиниция в координатен вид (изведете я!). Дайте примери, с които да обясните какво означава ротацията на дадено векторно поле да е положителна и какво – отрицателна.

<u>Трябва да можете:</u> Да визуализирате дадено векторно поле и да интепретирате графиката (Упр. 3/ 1,2,3), да намирате линеаризацията на дадено векторно поле (доп. зад. 1.4/ 3), да реализирате метода на Нютон за решаване на нелинейни алгебрични системи (доп. зад. 1.4/ 13), да намирате и интепретирате дивергенцията и ротацията (2D и 3D) на дадено векторно поле (Упр. 3/ 1,2,3 , доп. зад. 1.4/ 4)

5. Уравнения на топло- и масо-пренос

Формулирайте уравнението на непрекъснатостта. Като въведете основните възможни приноси към потока, формулирайте уравненията на дифузията и адвекцията в операторна форма. Приведете ги в декартови координати. Обяснете как се получават (и какво моделират) уравнения от тип реакция-дифузия, реакция-дифузия-адвекция, реакция-дифузия-адвекция-хемотаксис (формулирайте ги в операторен вид).

<u>Трябва да можете:</u> Да съставяте математически модел от тип реакция-адвекция-дифузия, да налагате подходящи гранични условия, в т.ч. условия на Нойман и Робин, да решавате даден математически модел, като използвате NDSolve, да визуазлизирате и интерпретирате резултата (вж. задачите от Упр. 4).

6. Операторът набла в недекартови координати

<u>Трябва да можете:</u> При дадена смяна на координатите и базиса (дефиниран локален базис), да се изведе координатна форма на оператора набла. Например да се изведе оператора в полярни/сферични/цилиндрични координати (Лек. 1.6); При дадена координатна форма на оператора набла в дадени координати, да се изведе операторът на Лаплас в същата координатна система. (Лек. 1.6)

7. Криволинейни интеграли

Дайте дефиниция за криволинеен интеграл. Обяснете защо можем да го разглеждаме като обобщение на класическия Риманов интеграл. Дайте примери за величини, които могат да се пресметнат с помощта на криволинеен интеграл. Покажете как може да се пресметне работата, извършвана от векторно поле, при движение на тяло по дадена криволинейна траектория. Изведете Твърдение 9 от записките за пресмятане на даден криволинеен интеграл. Изведете Основната теорема за криволинейни интеграли.

*<u>Трябва да можете:</u> Да пресмятате даден криволинеен интеграл, като използвате Твърдение 9 или основната теорема за криволинейни интеграли (Упр. 5/1,2,4,5). Да представяте дадена физическа величина (път, поток през границата, работа и др.) като криволинеен интеграл (Упр. 5/ 2, 4, Упр. 6/ 2,5, Лек. 1.7/ Примери 28-31). Да разбирате смисъла на участващите в интегралите инфинитезимални величини, например **F.dr**, dx, dy и др. (Упр. 5/ 3, доп. Зад. 1.8.1/ 6)*

8. Теорема на Green. Теорема за дивергенцията.

Да се докаже теоремата на Green. Като използвате теоремата на Green, формулирайте 2D теоремата на Stokes, формулирайте и докажете

2D теоремата за дивергенцията. Формулирайте двете теореми и в 3D. Дайте интуитивно обяснение на теоремата за дивергенцията. Изведете уравнението на непрекъснатостта. Обяснете как се въвеждат точковите харатеристики на дадена непрекъсната среда.

Трябва да можете: *Да използвате основните теореми на векторното интегрално смятане за пресмятането на даден интеграл (вж. задачите от Упр. 6)*

II. Линейна алгебра

9. Геометрия на линейните алгебрични системи

Дайте примери, с които да изясните трите възможности за решенията на система с две уравнения и две неизвестни. Дайте геометрична илюстрация по редове и по стълбове. Какво е предимството на това да се прави илюстрация по стълбове? На база на примерите формулирайте необходимото и достатъчно условие за това дадена линейна алгебрична система да има решение. Формулирайте и докажете твърдение, свързано с възможния брой на решенията на дадена линейна алгебрична система.

Трябва да можете: Да виузализирате row picture и column picture за дадена линейна система (упр. 7/ 1, 2)

10. Основни подпространства, свързани с дадена матрица

Дефинирайте четирите основни подпространства, свързани с дадена матрица. Дайте дефиниция за ортогонални подпространства и за ортогонални допълнения. Дайте примери чрез илюстрации в R^3*. Формулирайте и докажете Основната теорема на линейната алгебра. Направете илюстрация.*

Трябва да можете: Да намирате размерностите и базисите на четирите основни подпространства, свързани с дадена матрица (упр. 7/ 3, 6)

11. Основните подпространства и линейните алгебрични системи

Формулирайте и докажете резултат, характеризиращ всички решения на дадена линейна алгебрична система, ако такива съществуват. Изяснете какви са възможностите за броя на решенията на дадена линейна алгебрична система в зависимост от формата и ранга на матрицата на системата.

Трябва да можете: Да характеризирате решенията на дадена система (упр. 7/ 4,5,6,7)

12. Линейни оператори

Дайте дефиниция за линеен оператор. Обяснете как линейните трансформации в крайномерни пространства могат да се представят с матрици. Дайте примери. Покажете как се променя матрицата на трансформацията T: U -> V при промяна на базиса на U / V / и двете. Дайте дефиниция за подобни матрици.

<u>Трябва да можете:</u> Да намирате матрицата на дадена линейна трансформация (упр. 8/ 1, 2), да сменяте матрицата на трансформацията при смяна на базиса (упр. 8/ 2)

13. Собствен базис

Дайте дефиниция за собствен вектор и собствена стойност на дадена линейна трансформация. Мотивирайте въвеждането на тези понятия от гледна точка на матрицата на трансформацията при собствения базис. Формулирайте твърдение за диагонализиране на дадена матрица. Формулирайте твърдение за диагонализиране на дадена симетрична матрица.

<u>Трябва да можете:</u> Да намирате собствени стойности и собствени вектори и да диагонализирате матрица (упр. 8/ 3, 4, 5), да използвате диагонализацията, за да намерите обратна матрица (упр. 8/ 4), да повдигнете матрица на степен или да намерите апроксимация от по-нисък ред (упр. 9/ зад. 2), да намирате число на обусловеност на матрицата, дефинирано чрез собствените ѝ стойности и да разбирате смисъла на това число (упр. 8/ зад. 3) .

14. Линейни задачи за най-малки квадрати

Формулирайте общата линейна задача за най-малки квадрати (приведете три еквивалентни формулировки). Изведете нормалните уравнения на базата на геометрични и на базата на аналитични съображения. Обяснете защо често използването на нормалните уравнения на практика има съществени недостатъци.

<u>Трябва да можете:</u> Да формулирате задача за най-малки квадрати по дадена таблица от данни (като евентуално изберете подходяща по вид функция, която да апроксимира данните) във векторно-матрична форма или като разпишете целевата функция. Да я решите, като използвате нормални уравнения или като минимизирате сумата от квадратите на грешките и да визуализирате резултата. (упр. 9/ зад. 1)

15. Декомпозиция по сингулярни стойности

Формулирайте декомпозицията по сингулярни стойности. Покажете как може да бъде намерена. Дайте геометрична илюстрация във връзка с базисите на четирите *основни подпространства. Покажете как декомпозицията може да се използва за получаване на апроксимация от по-нисък ред на дадена матрица. Покажете как декомпозицията може да се използва за решаване на линейна задача на най-малките квадрати.*

Трябва да можете: Да намерите SVD за дадена матрица (упр. 9/ 1,2), да използвате SVD, за да намерите псевдообратната на дадена матрица (и/или да решите съответна задача за най-малки квадрати) (упр.9/ 1), да намирате апроксимация от по-нисък ред на дадена матрица (упр. 9/ 2), да намирате число на обусловеност чрез сингулярните стойности на матрицата (аналогично на упр. 8/ 3).

Теоретични основи на индустриалната математика – част 2

III. Тензорно смятане и приложения

1. Реципрочни базиси

Да се въведе конвенцията за сумиране на Айнщайн. Да се въведе понятието реципрочен базис и да се обясни защо възниква необходимостта от въвеждането на такъв. Да се изведе формула за скаларно произведение и норма на вектор при въведени реципрочни базиси. Да се докаже, че реципрочният на даден базис винаги съществува и да се обясни как може да се намери. Да се въведат понятията ковариантни и контравариантни координати и да се изведат формули за тяхното намиране.

2. Ковариантни и контравариантни базиси

Да се дефинира ковариантният базис на дадена координатна система. Каква е геометричната интерпретация на този базис? Да се мотивира въвеждането на символите на Christoffel. Да се изведе формула за пресмятането им. Да се приведе в координатна форма в общия вид (при произволни координати) II закон на Нютон.

3. Ковариантните базиси и диференциалното смятане

Да се мотивира въвеждането на ковариантна производна и да се изведе формула за нея. Да се изведе формула за оператора ∇ в произволна координатна система. Да се изведе формула за дивергенцията на векторно поле в произволна координатна система. Да се въведат понятията ротация и градиент на векторно поле чрез използване на общата дефиниция на ∇.

4. Тензори и тензорни величини

Да се въведе понятието тензор от втори ред. Да се дефинира тензорно произведение на два вектора. Да се дефинира равенство на тензори, транспониране на тензор, симетричен, антисиметричен, сингулярен тензор. Да се изведе представяне в Декартови координати на даден тензор от втори ред. Четири набора от компоненти на тензор при въведени ковариантен и контравариантен базис. Да се докаже теоремата на Коши за напреженията. Да се въведе понятието тензор на напреженията на Коши. Да се обясни какъв е смисълът на Декартовите компоненти на тензора на напреженията.

5. Модели от механиката на непрекъснатите среди

Да се обясни разликата между Лагранжевата и Ойлеровата постановка на задача от механиката на непрекъснатите среди. Да се покаже как възниква необходимостта от въвеждането на материална производна и да се даде дефиниция. Да се изведат общите уравнения на Navier–Stokes, отразяващи законите за запазване на линейния момент и масата. Да се изведат и приведат в координатна форма уравненията на Navier–Stokes в случая на несвиваеми Нютонови флуиди. Да се обясни какво представляват конститутивните закони и защо се налага тяхното използване в този тип модели.

<u>По раздел III трябва да можете:</u> *Да се въведе ковариантен базис при зададени координати. Да се намери реципрочен базис. Да се пресметнат символите на Christoffel. Да се приведе законът на Нютон в конкретна координатна система.*

Да се намерят ковариантните/контравариантните координати на даден вектор. Да се пресметне скаларното произведение на два вектора (не е задължително единият да е вече зададен с ковариантни координати, а другият -- с контравариантни) или нормата на вектор, без да се минава към Декартови координати.

Да се пресметне дадена ковариантна производна. Да се пресметне градиент от дадена скаларна функция/ дивергенция на дадено векторно поле в дадена координатна система.

Да се намери някой набор координати на даден тензор.

IV. Размерностен анализ и приложения

1. Размерности – основни понятия. П-Теорема на Бъкингам

Да се даде дефиниция за основни и производни мерни единици, система от мерни единици, клас от системи мерни единици, размерност, безразмерна величина и да се дадат примери. Да се формулира и докаже П-Теоремата на Бъкингам.

2. Обезразмеряване

Да се обясни какво се има предвид под обезразмеряване и какви са преимуществата на това да се работи с обезразмерения модел. Да се направи обезразмеряване в линейното уравнение на топлопроводността, уравненията на Навие-Стокс (като първо се приведат във формулировка „вихър-функция на тока"), задачата за снаряда. За уравненията на Навие-Стокс да се изясни смисъла на числото на Рейнолдс и каква информация носи то.

3. Приложение на размерностния анализ за линейната N-мерна радиално-симетрична задача за мигновен точков източник на топлина

Да се формулира математическият модел. Като се използва П-Теоремата на Бъкингам, да се намери решение на диференциалната задача. Да се формулират основните свойства на решението. Да се обясни какво се има предвид под междинна асимптотика на процеса.

4. Приложение на размерностния анализ за квазилинейната N-мерна радиално-симетрична задача за мигновен точков източник на топлина

Да се формулира математическият модел. Като се използва П-Теоремата на Бъкингам, да се намери решение на диференциалната задача. Да се формулират основните свойства на решението.

<u>По раздел IV трябва да можете</u>: *Да обезразмерите дадена диференциална задача. Да приложите П-Теоремата на Бъкингам, за да получите еквивалентен на даден закон в безразмерни величини.*

V. Качествен анализ на автономни системи ОДУ

1. Основни понятия

Да се даде дефиниция за автономна система, фазово пространство, траектория, равновесна точка, периодична орбита, устойчивост по Ляпунов, асимптотична устойчивост. Да се приведат подходящи примери. Да се обясни какво се има предвид под „качествено изследване на динамична система" и „асимптотика на решенията".

2. Линейни автономни системи

Да се изведе общият вид на решенията на дадена линейна автономна система ОДУ. Да се обосноват и илюстрират графично основните възможни фазови портрети.

3. Изследване на локална устойчивост

Да се изведе линеаризацията на дадена автономна система ОДУ. Да се формулира теоремата на Hartman–Grobman. Да се приложи за изследване на съществуване и устойчивост на равновесните точки в модела на Monod в зависимост от параметрите.

<u>*По раздел V трябва да можете*</u>*: Да се скицира на ръка фазовият портрет за дадена двумерна линейна автономна система ОДУ.*

Да се сведе дадена система ОДУ към автономна система от първи ред. Да се намерят равновесните точки. Да се изследва съществуването и устойчивостта им (локална) в зависимост от параметрите в модела. Да се построят фазови портрети, като се използва системата Mathematica (или друг език за програмиране).

VI. Параметрична идентификация в математически модели

1. Формулировка на задачата за параметрична идентификация

Да се формулира най-общо задачата за параметрична идентификация. В частност, да се формулира общата (нелинейна) задача за най-малки квадрати. Въведете понятията целева функция и метод на спускане и обяснете идеята на последните.

2. Методи с линейно търсене

Да се опише общата идея на методите с линейно търсене. Да се опишат методите на най-бързото спускане, Нютон, Гаус-Нютон. Да се даде дефиниция за линейна, квадратична, суперлинйена сходимост. Да се обясни какви са предимствата и недостатъците на разгледаните методи.

3. Методи с търсене в доверителна област

Да се опише общата идея на методите с търсене в доверителна област. В частност да се изведе методът на Levenberg-Marquardt.

4. Параметрична идентификация в модели, описвани с диференциални уравнения

Да се опише накратко подходът за идентифицирането на параметри в модели, описвани с диференциални уравнения.

<u>*По раздел VI трябва да можете:*</u> *Да се реализира всеки от разгледаните методи за числено оптимиране. По дадени експериментални данни да се направи параметрична идентификация в модел, описан чрез аналитично зададена функция / система ОДУ/ ЧДУ, като се приложи даден метод за числено решаване на възникващата оптимизационна задача.*