3 Обезразмеряване. Линейно уравнение на топлопроводността.

Разглеждаме задачата за разпространението на топлината в хомогенна тънка пръчка с крайна дължина l, известни физични параметри (топлофизични свойства) и постоянно сечение A. Предполагаме, че топлината протича само в направление x, и че температурата е постоянна във всяко напречно сечение A. Първоначално пръчката е при нулева температура, а на краищата ѝ се поддържа постоянна температура T_0 при $t > 0$. Търсим разпределението на температурата $u(x,t)$ в пръчката като функция на x и t. Ще намерим уравнение за нея.

Нека c е *специфичната топлоемност* на материала на пръчката (c е количеството топлинна енергия, необходимо да повиши с 1^0 температурата на единица маса от материала). В СГС размерността на c е $[c] = EM^{-1}\Theta^{-1}$ (калории /(г. $^\circ C$)). Тогава количеството топлина в пръчката от x до $x + \Delta x$ е

$$c\rho u(\xi,t)A\Delta x,\ x \le \xi \le x + \Delta x,$$

където ρ е плътността на материала. Следователно

$$[c\rho] = EM^{-1}\Theta^{-1}ML^{-3} = EL^{-3}\Theta^{-1}(\text{кал.}/\text{см.}^3\ ^\circ C),$$

$$[c\rho uA\Delta x] = E\Theta^{-1}L^{-3}\Theta L^2 L = E(\text{кал.})$$

Ако $\Phi(x,t)$ е *топлинният поток* или количеството топлинна енергия, преминаващо за единица време през сечението през точката x, то можем да напишем уравнение за баланс на енергията в сегмента $[x, x + \Delta x]$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(c\rho u(\xi,t)A\Delta x) = \Phi(x,t) - \Phi(x + \Delta x, t). \tag{3.1}$$

Приема се, че потокът е положителен, ако топлината се разпространява по посока на нарастване на x. Като разделим (3.1) на Δx и оставим $\Delta x \to 0$, (тогава $\xi \to x$), получаваме частното диференциално уравнение

$$c\rho A u_t(x,t) = -\Phi_x(x,t), \tag{3.2}$$

което е локална диференциална форма на уравнението (3.1) на баланса на енергията.

В (3.2) има 2 неизвестни - u и Φ. Ще въведем и закона на Фурие за топлината (установен експериментално) - потокът е пропорционален на сечението A и на градиента на температурата u_x:

$$\Phi(x,t) = -kAu_x(x,t), \tag{3.3}$$

където константата k е коефициентът на топлопроводност - количеството топлина, което преминава за единица време през единица дължина и повишава температурата с 1^o (в СГС се измерва в кал/(см.с. ^oC), $[k] = EL^{-1}T^{-1}\Theta^{-1}$.

Заместваме (3.3) в (3.2) и получаваме едно уравнение за $u(x,t)$:

$$c\rho u_t(x,t) = ku_{x,x}(x,t) \tag{3.4}$$

Ако въведем температуропроводността

$$\varkappa = \frac{k}{c\rho}, [\varkappa] = L^2T^{-1} = \frac{EL^{-1}T^{-1}\Theta^{-1}}{E\Theta^{-1}L^{-3}}$$

(3.4) може да се запише така:

$$u_t(x,t) = \varkappa u_{x,x}(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0 \tag{3.4'}$$

което е уравнението на топлопроводността (дифузията). Другите поставени в началото условия се записват така:

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < l \tag{3.5}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = T_0, \quad t > 0. \tag{3.6}$$

Ще запишем тази математическа задача в безразмерен вид, като изберем характерни стойности на зависимите и независимите променливи. Това включва характерно време t_c, характерна дължина l_c, и характерна температура u_c. Константите, които участват в модела, са l, T_0, и $\varkappa$. Естествено е да изберем $l_c = l,\ u_c = T_0$. А как да мащабираме времето? Тъй като единствената комбинация на l, T_0 и $\varkappa$, която има размерност на време, е $l^2/\varkappa$: $[\frac{l^2}{\varkappa}] = \frac{L^2}{L^2T^{-1}} = T$, то избираме $t_c = \frac{l^2}{\varkappa}$.

Следователно дефинираме *безразмерните* зависими и независими променливи по следния начин:

$$\overline{x} = \frac{x}{l}, \overline{t} = \frac{t}{l^2/\varkappa}, \overline{u} = \frac{u}{T_0}. \tag{3.7}$$

Задачата (3.4')-(3.6) в променливите (3.7) приема вида

$$\left|\begin{array}{ll} \overline{u}_{\overline{t}}(\overline{x},\overline{t}) - \overline{u}_{\overline{x},\overline{x}}(\overline{x},\overline{t}) = 0, & \overline{t} > 0, 0 < \overline{x} < 1, \\ \overline{u}(\overline{x},0) = 0, & 0 < \overline{x} < 1, \\ \overline{u}(0,\overline{t}) = \overline{u}(1,\overline{t}) = 1, & \overline{t} > 0 \end{array}\right.$$

Този процес се нарича *обезразмеряване* на задачата. Едно от предимствата да се работи с безразмерни модели е, че след като задачата веднъж е решена за $\overline{u}(\overline{x},\overline{t})$, то решението е известно и за всеки избор на физичните константи $l, T_0, \varkappa$, като използваме (3.7):

$$u(x,t) = T_0\overline{u}(\overline{x},\overline{t}),\ \overline{x} = \frac{x}{l},\ \overline{t} = \frac{t}{l^2/\varkappa}.$$

Познаването на характерното време на процеса - $t_c = l^2/\varkappa$, дава една реална за задачата скала на времето, а също и ценна информация за това кога ще настъпят съществени изменения в процеса. Например, ако се изледва разпространението на топлината в медна пръчка ($\varkappa = 1.32$) с дължина 2.54 см, то характерното време на процеса е $t_c = (2.54)^2/1.32 = 4.88$ с и би било безсмислено за стъпка по времето при пресмятанията да се избере 1 мин.