4 Уравнения за движение на несвиваема вискозна течност – двумерен случай. Обезразмеряване.

4.1. Постановка на задачата в променливи "скорост – налягане"

Основните уравнения, описващи плоското течение на несвиваема вискозна течност с постоянни свойства при отсъствие на външни сили са са двете уравнения за количеството на движение (уравнения на Навие-Стокс), и уравнението за непрекъснатост (изразява закона за запазване на масата):

$$\left|\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u\\ (2) & \dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v\\ (3) & \dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{array}\right.$$

Неизвестните физични променливи са компонентите u, v на скоростта $\overline{V}=(u,v)$ и налягането p, $[p]=ML^{-1}T^{-2}$.

Физичните характеристики на течността са: ρ – плътност, μ – вискозитет (зависи от кохезионните сили между молекулите на течността), $[\mu]=ML^{-1}T^{-1}$, ν – кинематичен коефициент на визкозитет ($\nu=\frac{\mu}{\rho}$), $[\nu]=ML^{-1}T^{-1}L^3M^{-1}=L^2T^{-1}$.

Уравненията (1)-(3) са записани в неподвижна координатна система (Ойлерова координатна система), относно която се движи течността. Членовете

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y},\quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}$$

моделират конвективните процеси в течността (конвективни членове), а $\nu\Delta u, \quad \nu\Delta v$ - дифузионните процеси (дифузионни членове). Да направим проверка за коректност на уравненията, т.е. да проверим дали всички членове в дадено уравнение имат еднакви размерности:

$[\frac{\partial u}{\partial t}]=[\frac{u}{t}]=LT^{-1}T^{-1}=LT^{-2}$

$[u\frac{\partial u}{\partial x}]=[u\frac{u}{x}]=L^2T^{-2}L^{-1}=LT^{-2}$

$[v\frac{\partial u}{\partial y}]=[v\frac{u}{y}]=L^2T^{-2}L^{-1}=LT^{-2}$

$[\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}]=[\frac{1}{\rho}\frac{p}{x}]=M^{-1}L^3ML^{-1}T^{-2}L^{-1}=LT^{-2}$

$[\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]=[\nu\frac{u}{x^2}]=L^2T^{-1}LT^{-1}L^{-2}=LT^{-2}$

$[\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]=[\nu\frac{u}{y^2}]=L^2T^{-1}LT^{-1}L^{-2}=LT^{-2}$

Коректността на другите две уравнения е очевидна.

4.2. Постановка на задачата в променливи "вихър – функция на тока"

Независимо от това, че числено може да се решава и системата (1)-(3), често изследването на процеса се прави в нови променливи: **вихър и функция на тока**.

От уравненията (1) и (2) изключваме налягането $p(x,y)$. За целта диференцираме (1) по y, а (2) - по x. Получаваме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}+\nu(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3})$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} + \nu(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3})$$

Изваждаме от първото уравнение второто и получаваме:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial v}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + u\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + v\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) =$$

$$= \nu[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x})] \tag{4}$$

Дефинираме функцията

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x},$$

която се нарича **вихър**. След като заместим в (4) получаваме:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})\xi + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu \Delta \xi$$

Използвайки дефиницията на вихъра и уравнението (3), уравнението (4) приема вида:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu \Delta \xi \tag{5}$$

Уравнението (5) се нарича **уравнение за пренос на вихъра**.

Дефинираме **функцията на тока** $\Psi(x, y)$, удовлетворяваща условията:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = u, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v. \tag{6}$$

Но

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \Psi}{\partial x}) = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \xi.$$

Получаваме системата уравнения:

$$\begin{array}{ll} (7) \qquad & \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + u\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + v\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = \nu \Delta \xi \\ \Delta \Psi = \xi \end{array} \right. \\ (8) & \end{array}$$

4.3. Обезразмеряване

Ще запишем задачата (7)–(8) в безмерни променливи

$$\overline{x} = \frac{x}{L_c}, \overline{y} = \frac{y}{L_c}, \overline{u} = \frac{u}{V_c}, \overline{v} = \frac{v}{V_c}, \overline{t} = \frac{t}{t_c}, \overline{\Psi} = \frac{\Psi}{\Psi_c}, \overline{\xi} = \frac{\xi}{\xi_c}.$$

За характерна дължина L_c може да се избере някой от геометричните размери на областта на течението, за характерна скорост V_c – една от компонентите на началната скорост на течението.

Размерност на време имат:

$$\frac{L_c}{V_c} \ \left([\frac{L_c}{V_c}] = LL^{-1}T = T,\right) \qquad \frac{L_c^2}{\nu} \ \left([\frac{L_c^2}{\nu}] = L^2L^{-2}T = T\right).$$

Следователно можем да изберем $t_c = \frac{L_c}{V_c}$ или $t_c = \frac{L_c^2}{\nu}$. Последователно определяме:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} \frac{\partial \xi}{\partial \overline{\xi}} \frac{\partial \overline{t}}{\partial t} = \frac{\xi_c}{t_c} \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} \frac{\partial \xi}{\partial \overline{\xi}} \frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = \frac{\xi_c}{L_c} \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \xi}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial \overline{x}}(\frac{\partial \xi}{\partial x})\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = \frac{\xi_c}{L_c^2} \frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{x}^2}$$

Заместваме в уравненията (7)–(8):

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\xi_c}{t_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + V_c\overline{u}\frac{\xi_c}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + V_c\overline{v}\frac{\xi_c}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}} = \nu\frac{\xi_c}{L_c^2}(\frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{y}^2}) \\ \frac{\Psi_c}{L_c^2}(\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \overline{y}^2}) = \xi_c\overline{\xi} \end{array} \right.$$

Съкращаваме на ξ_c и получаваме:

$$\left| \begin{array}{ll} (9) & \frac{1}{t_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + V_c\overline{u}\frac{1}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + V_c\overline{v}\frac{1}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}} = \nu\frac{1}{L_c^2}(\frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{y}^2}) \\ (10) & \frac{\Psi_c}{L_c^2}(\frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial \overline{y}^2}) = \xi_c\overline{\xi} \end{array} \right.$$

4.3.1. Избираме $t_c = \frac{L_c}{V_c}$ – конвективно време.

Заместваме в (9):

$$\frac{V_c}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + V_c\overline{u}\frac{1}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + V_c\overline{v}\frac{1}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}} = \nu\frac{1}{L_c^2}(\frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{y}^2})$$

Следователно:

$$(11) \qquad \frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + \overline{u}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}} = \frac{\nu}{L_c V_c}\Delta\overline{\xi}$$

Дефинираме:

$\mathrm{Re} = \frac{V_c L_c}{\nu}$ – **число на Рейнолдс**, $[\mathrm{Re}] = LT^{-1}LL^{-2}T = 1$.

Следователно Re е безмерна величина. Re зависи съществено от V_c и при $\mathrm{Re} >> 1$ дифузионният член оказва малко влияние върху процеса.

Най-често за ξ_c се избира

$$\xi_c = \frac{1}{t_c} = \frac{V_c}{L_c}.$$

След заместване в (10) получаваме

$$\frac{\Psi_c}{L_c^2}\Delta\overline{\Psi} = \frac{V_c}{L_c}\Delta\Psi, \quad \frac{\Psi_c}{L_c}\Delta\overline{\Psi} = V_c\overline{\xi}.$$

Изборът $\Psi_c = V_c L_c$ води до $\Delta\overline{\Psi} = \overline{\xi}$.

Така след като дефинирахме

$$\mathrm{Re} = \frac{V_c L_c}{\nu}, \qquad \xi_c = \frac{V_c}{L_c}, \qquad \Psi_c = V_c L_c$$

получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + \overline{u}\dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}} = \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \overline{\xi} & (12) \\ \Delta \overline{\Psi} = \overline{\xi} & (13) \end{array} \right.$$

4.3.2. Избираме $t_c = \frac{L_c^2}{\nu}$ – дифузионно време.

Заместваме в уравнение (9):

$$\frac{\nu}{L_c^2}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + V_c\overline{u}\frac{1}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + V_c\overline{v}\frac{1}{L_c}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}} = \nu\frac{1}{L_c^2}(\frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\xi}}{\partial \overline{y}^2})$$

Умножаваме с $\frac{L_c^2}{\nu}$ и получаваме:

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + \mathrm{Re}(\overline{u}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}}) = \Delta \overline{\xi}.$$

При $\mathrm{Re} << 1$ конвективните членове оказват малко врияние върху процеса. Избираме

$$\xi_c = \frac{1}{t_c} = \frac{\nu}{L_c^2}, \qquad \Psi_c = \nu$$

и получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{ll} \dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + \mathrm{Re}(\overline{u}\dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\dfrac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}}) = \Delta \overline{\xi} & (14) \\ \Delta \overline{\Psi} = \overline{\xi} & (15) \end{array} \right.$$

4.4. Дивергентен запис на уравнените за вихъра.

В безразмерни променливи уравнението (3) е (проверете):

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} = 0. \tag{16}$$

Преобразуваме уравнение (14) като използваме (16):

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + \mathrm{Re}[\overline{u}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{y}} + \overline{\xi}(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}})] = \Delta \overline{\xi}$$

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + \mathrm{Re}[\frac{\partial}{\partial \overline{x}}(\overline{u}\overline{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \overline{y}}(\overline{v}\overline{\xi})] = \Delta \overline{\xi}$$

$$\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{t}} + \mathrm{Re}\ div(\overline{\xi}\ \overline{V}) = \Delta \overline{\xi}$$

Полученият дивергентен запис е по-удобен при числено решаване на уравнението.

4.5. Частни случаи

1.Цветово уравнение.

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u\frac{\partial \xi}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

Това уравнение е модел например на движение на оцветена течност в неоцветена течност. То е линейно уравнение, като $\xi = \xi(x,t),\ \alpha = 1/\mathrm{Re},\ u = u(x)$ или $u = \mathrm{const}$ (u има смисъл на скорост).

2. Уравнение на Бюргерс.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Това уравнение е нелинейно. При числено решаване е удобен неговият дивергентен запис:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{u^2}{2}) = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

.