7. НЕЛИНЕЙНА РАДИАЛНО СИМЕТРИЧНА *N*-МЕРНА ЗАДАЧА ЗА МИГНОВЕН ТОЧКОВ ИЗТОЧНИК

7.1. Постановка на задачата. При избухването на ядрена експлозия в момента $t = 0$ се освобождава енергия e, но въздухът остава в покой. Силни топлинни вълни се разпространяват в неподвижния газ. На този етап радиационният пренос на енергия протича със скорост много пъти надвишаваща скоростта на звука и затова хидродинамичният пренос на вещество може да бъде пренебрегнат. Топлопроводността на въздуха зависи основно от излъчването и коефициентът на топлопроводност k може да се разглежда като степенна функция на температурата u:

$$k(u) = k_0 u^\sigma.$$

Стойността на σ е приблизително 5. Зависимостта на топлоемкостта $c_v = c\rho$ от температурата е значително по-слаба и на първо време може да бъде пренебрегната.

7.2. Математическият модел на задачата е:

$$(1) \qquad c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} k_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

$$(2) \qquad u(r,0) \equiv 0, \ r \neq 0,$$

$$(3) \qquad \omega_N c\rho \int_0^\infty r^{N-1} u(r,t) dr = e, \quad \omega_N = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)},$$

$$(4) \qquad \lim_{r\to 0} r^{N-1} u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad t > 0,$$

$$(5) \qquad \lim_{r\to\infty} u(r,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$(6) \qquad u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \text{ако } u = 0.$$

Според последното условие (което е ново в сравнение с условията при линейната задача), топлинният поток $u^\sigma u_r$ трябва да бъде равен на 0 в точките, в които температурата u е нула .

7.3. Размерностен анализ. Преписваме уравнение (1) във вида:

$$(1') \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} a u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right),$$

където $a = \dfrac{k_0}{c\rho}$. Тогава температуропроводността е $\varkappa = a u^\sigma$. Да означим $Q = \dfrac{e}{c\rho} = \dfrac{e}{c_v}$. Нашият опит досега показва, че това отношение се появява при автомоделния закон и затова можем да намалим броя на участващите променливи в размерностния анализ:

$$t,\ r,\ u,\ Q,\ a,$$

и да получим физичен закон от вида

$$g(t, r, u, Q, a) = 0.$$

За основни размерности избираме T, L, Θ. Тогава

$$[Q] = [e/c_v] = \Theta L^N,$$

$$[a] = [\varkappa/u^\sigma] = L^2 T^{-1} \Theta^{-\sigma}.$$

Размерностната матрица A сега е:

$$\begin{array}{c} \\ T \\ L \\ \Theta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t & r & u & Q & a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & N & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\sigma \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тук $m = 5$, $n = 3$ и $\operatorname{rank}(A) = 3$. Следователно има $m - r = 2$ безразмерни величини, които могат да се получат от t, r, u, Q и a. Съответната система е:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_5 & = & 0 \\ \alpha_2 + N\alpha_4 + 2\alpha_5 & = & 0 \\ \alpha_3 + \alpha_4 - \sigma\alpha_5 & = & 0 \end{cases}$$

Първо полагаме $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 0$. Тогава

$$\alpha_5 = \alpha_1 = \frac{N}{N\sigma + 2}, \quad \alpha_4 = -\frac{2}{N\sigma + 2}\,.$$

След това полагаме $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 1$. Тогава

$$\alpha_5 = \alpha_1 = -\frac{1}{N\sigma + 2}, \quad \alpha_4 = -\frac{\sigma}{N\sigma + 2}\,.$$

Съответните безразмерни величини са

$$\pi_1 = u(ta)^{\frac{N}{N\sigma+2}} Q^{-\frac{2}{N\sigma+2}}, \quad \pi_2 = r(ta)^{-\frac{1}{N\sigma+2}} Q^{-\frac{\sigma}{N\sigma+2}}.$$

Така намираме физичния закон $\pi_1 = f(\pi_2)$, или:

$$u(r,t) = (ta)^{-\frac{N}{N\sigma+2}} Q^{\frac{2}{N\sigma+2}} f(\xi), \tag{7}$$

$$\xi = \frac{r}{(ta)^{\frac{1}{N\sigma+2}} Q^{\frac{\sigma}{N\sigma+2}}}\,. \tag{8}$$

7.4. Автомоделно уравнение и неговото решение. За да определим функцията $f(\xi)$, заместваме (7), (8) в (1′). Това води до следното нелинейно обикновено диференциално уравнение за $f = f(\xi)$:

$$\frac{1}{\xi^{N-1}} \left(\xi^{N-1} f^\sigma f'\right)' + \frac{1}{N\sigma + 2} \xi f' + \frac{N}{N\sigma + 2} f = 0, \quad \xi > 0,$$

или като умножим с ξ^{N-1}:

$$\left(\xi^{N-1}f^{\sigma}f'\right)' + \frac{1}{N\sigma+2}(\xi^{N}f)' = 0, \quad \xi > 0. \tag{9}$$

Имайки предвид (7), от (4), (5) и (6) намираме следните условия за $f(\xi)$:

$$\lim_{\xi\to o}\xi^{N-1}f^{\sigma}f' = 0, \quad \text{или} \quad \lim_{\xi\to 0}f^{\sigma}f' = 0 \tag{10}$$

за ограничената в $\xi = 0$ функция $f(\xi)$;

$$\lim_{\xi\to\infty}f(\xi) = 0, \tag{11}$$

$$f^{\sigma}f' = 0, \quad \text{ако } f = 0. \tag{12}$$

Като интегрираме (9), получаваме

$$f^{\sigma}f' + \frac{1}{N\sigma+2}\xi f = C, \quad \xi > 0,$$

и като използваме условието (12), намираме $C = 0$, така

$$f^{\sigma}f' + \frac{1}{N\sigma+2}\xi f = 0, \quad \xi > 0. \tag{13}$$

След разделяне на променливите и интегриране получаваме

$$f^{\sigma} = \frac{-\sigma}{2(N\sigma+2)}\xi^2 + C.$$

Избираме C във вида:

$$C = \frac{\sigma}{2(N\sigma+2)}\xi_0^2$$

с нова неизвестна константа ξ_0. Така

$$f(\xi) = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)}(\xi_0^2 - \xi^2)_+\right]^{1/\sigma}. \tag{14}$$

За да определим ξ_0 използваме условие (3) и заместваме (7), (8) в него . Това дава

$$\omega_N\int_0^{\infty}\xi^{N-1}f(\xi)d\xi = 1,$$
$$\omega_N K\int_0^{\xi_0}\xi^{N-1}(\xi_0^2 - \xi^2)^{1/\sigma}d\xi = 1, \quad K = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)}\right]^{1/\sigma}.$$

След смяната на променливите $\eta = \xi/\xi_0$ намираме

$$\omega_N K\xi_0^{N+\frac{2}{\sigma}}\int_0^1\eta^{N-1}(1-\eta^2)^{1/\sigma}d\eta = 1.$$

Познатият интеграл

$$\int_0^1 x^m(1-x^2)^p dx = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(p+\frac{m+3}{2}\right)}, \quad p+1>0, \quad m+1>0$$

дава

$$\xi_0 = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\sigma} + \frac{N}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\sigma}\right)\pi^{\frac{N}{2}}} \left(\frac{2(N\sigma + 2)}{\sigma}\right)^{1/\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{N\sigma+2}}, \tag{15}$$

Така автомоделното решение на задачата (1)-(6) е:

$$u_s(r,t) = (ta)^{-\frac{N}{N\sigma+2}} Q^{\frac{2}{N\sigma+2}} \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)} \left(\xi_0^2 - \frac{r^2}{(taQ^\sigma)^{\frac{2}{N\sigma+2}}} \right) \right]^{1/\sigma} \tag{16}$$

$$\text{за } r \le r_f = \xi_0(\sigma, N)\, [taQ^\sigma]^{\frac{1}{N\sigma+2}},$$

$$u_s(r,t) = 0 \text{ за } r \ge r_f.$$

Точката $r_f = r_f(t)$ определя носителя на автомоделното решение. Нарича се *точка на топлинния фронт.*

7.5. Свойства на автомоделното решение.

1. Крайна скорост на разпространение на топлината: автомоделното решение има краен носител за всяко $t > 0$.

2. Амплитудата на автомоделното решение намалява с времето по закона:

   $u_{s,max}(t) = u_s(0,t) = C(\sigma, N) Q^{\frac{2}{N\sigma+2}} a^{\frac{-N}{N\sigma+2}} t^{\frac{-N}{N\sigma+2}} \to 0, \quad t \to \infty$

   и зависи от размерността на пространството N. (защо?)

3. *Топлинният фронт* $r_f(t)$ се увеличава с температурата по закона:

   $$r_f(t) = \xi_0(\sigma, N) Q^{\frac{\sigma}{N\sigma+2}} a^{\frac{1}{N\sigma+2}} t^{\frac{1}{N\sigma+2}} \to \infty, \quad t \to \infty$$

   и зависи от размерността на пространството N.

4. Автомоделното решение е класическо решение (и безкрайно диференцируемо) навсякъде освен върху изродената повърхнина

   $$\partial D = \left[r = (Q^\sigma ta)^{\frac{1}{N\sigma+2}} \xi_0 \right] \times R_+,$$

   където то има непрекъснат топлинен поток $u_s^\sigma u_{s,r}$.

5. $\lim_{t \to 0^+} u_s(0,t) = \infty$. Така автомоделното решение отговаря на началните данни:

   $$u_s(x, 0) = Q\delta(x), \quad x \in R^N,$$

   където $\delta(x)$ е делта функцията на Дирак.

7.6. Асимптотична устойчивост на автомоделното решение.

Автомоделното представяне на решението $u(r,t)$ на задачата (1), (3)-(6) с произволни начални данни $u_0(r)$

$$u(r,0) = u_0(r), \quad \omega_N \int_0^\infty r^{N-1} u_0(r) dr = Q,$$

е функцията

$$\bar{f}(\xi,t) = u(r,t)(ta)^{\frac{N}{N\sigma+2}} Q^{-\frac{2}{N\sigma+2}}, \quad \xi = \frac{r}{(taQ^\sigma)^{\frac{1}{N\sigma+2}}}.$$

Може да бъде доказано, че автомоделното решение(16) е асимптотически устойчиво:

$$||\bar{f}(\xi,t) - f(\xi)||_{C(R^N)} \to 0, \quad t \to \infty.$$

където $f(\xi)$ е автомоделната функция (14).